筑波大学理工学群応用理工学類

平成３０年度個別学力検査等(後期日程)

小 論 文 問 題

注意事項

1） 試験開始の合図があるまでこの問題冊子の中を見てはならない。

2） この冊子には，［問題Ⅰ］から［問題Ⅲ］まで３題の問題がある。

3） 解答用紙３枚と下書き用紙３枚の定められた欄に，受験する「学群，学類」，「氏名」，「受験番号」を記入すること。

4） すべての解答用紙上部の $\boxed{}$ 内に問題番号を記入すること。ただし、下の表のように各問題にそれぞれ１枚ずつの解答用紙を使用せよ。白紙の解答用紙も回収する。解答が書ききれない場合には，解答用紙の裏面を使用しても差し支えない。

問題番号	解答用紙
問題Ⅰ	1枚
問題Ⅱ	1枚
問題Ⅲ	1枚

問題 I

$f(x)=e^{-x^2}$ とするとき，座標平面の第1象限内で定義された2つの曲線

$$C_1: y=f(x) \qquad C_2:\ y=-\frac{1}{2}\frac{df(x)}{dx}$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C_1 上を動く点 $\left(t, f(t)\right)$ と原点 $\mathrm{O}\left(0,0\right)$ との距離を $s(t)$ とするとき，$s(t)$ の最小値を求めよ。

(2) 曲線 C_1 と曲線 C_2 の交点 P の座標を求めよ。

(3) 点 P と原点 $\mathrm{O}\left(0,0\right)$ を通る直線を L とする。直線 L の方程式を求めよ。

(4) 曲線 C_2 と直線 L で囲まれた図形の面積を求めよ。

(5) y 軸，曲線 C_1，直線 L で囲まれた図形を，y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

問題 II

O を原点とする xy 平面上に 2 点 A(1,0), A$'$(−1,0) をとる。さらに，1 以外の正の定数 α に対して，点 A からの距離が点 A$'$ からの距離の α 倍であるような点全体が表す図形を L とする。以下の問いに答えよ。

(1) L を表す方程式を求め，L の図形的特徴を述べよ。

(2) 原点 O 以外の点 P に対して $\overrightarrow{\mathrm{OP'}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{\mathrm{OP}^2}$ となる点 P$'$ を定める。点 P が L 上を動くとき点 P$'$ が描く図形を L' とする。L' を表す方程式を求め，L' と L を比較せよ。

(3) L 上で原点 O からの距離が最小の点を B，原点 O からの距離が最大の点を B$'$ とする。原点 O を中心とする半径1の円周上を点 Q が動くとき，α を用いて $\dfrac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{B'Q}}$ を表せ。

(4) 原点 O を中心とする半径1の円周上に，A, A$'$ と異なる 2 点 C(p,q), C$'(-p,-q)$ をとる。1 以外の正の定数 β に対して，点 C からの距離が点 C$'$ からの距離の β 倍であるような点全体が表す図形を M とする。L と M が異なる 2 点で交わるとき，それら 2 点を結ぶ直線は原点 O を通ることを示し、その直線の方程式を求めよ。

問題 III

複素数αは$\alpha^2+\alpha+2=0$を満たすとする。また，複素数zに共役な複素数を$\overline{z}$で，複素数zの絶対値を$|z|$で表す。以下の問いに答えよ。

(1) $\alpha+\overline{\alpha}$および$\alpha\overline{\alpha}$を求めよ。

(2) 整数m,nを用いて$z=m+n\alpha$と表される複素数zに対して，それに共役な複素数も整数m',n'を用いて$\overline{z}=m'+n'\alpha$と表される。m,nを用いてm',n'を表せ。

(3) 整数m,nを用いて$z=m+n\alpha$と表される複素数zに対して，$|z|^2$をmとnを用いて表し，$|z|^2$が整数であることを示せ。

(4) 素数を1より大きい自然数の積で表すことはできない。ところが$\alpha^2+\alpha+2=0$を変形すると$2=-\alpha-\alpha^2=(1+\alpha)(0-\alpha)$となり，$z=1+\alpha,\ z'=0-\alpha$とおけば，複素数$z$と$z'$の積で素数2を表せることがわかる。そこで，整数$m,n,m',n'$を用いて

$$z=m+n\alpha,\ z'=m'+n'\alpha$$

によって複素数zとz'を定義したとき，zz'が素数となる場合を考える。ここで，zとz'はどちらも1や-1でないとする。そのようにして得られる素数のうち，30を超えないものをすべて求めよ。

(5) 整数m,n,m',n'に対して$(m+n\alpha)(m'+n'\alpha)$が素数となるとき，どんな整数p,q,p',q'を用いても$m+n\alpha$を

$$(p+q\alpha)(p'+q'\alpha)$$

と表すことはできないことを示せ。ただし$m+n\alpha,\ m'+n'\alpha,\ p+q\alpha,\ p'+q'\alpha$はどれも1や$-1$でないとする。