

平成30年度

理工学群数学類
私費外国人留学生入試

小論文
試験問題

注意事項

- ① 問 I ～問 III は別々の解答用紙に日本語で解答すること。
- ② 試験時間は90分です。

問題 I 次の問いに答えよ.

(1) $x \geq 0$ に対して, $0 \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$ が成り立つことを示せ.

(2) a, b は定数で $a > b > 0$ を満たす. 次の極限值を求めよ.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{at}^{bt} \sin \frac{1}{x} dx$$

問題 II p を 3 以上の素数とする. 次の問いに答えよ.

(1) $1 \leq a \leq p-1$ とする. a^2 を p で割った余りが 1 となる a をすべて求めよ.

(2) $1 \leq a, b, c \leq p-1$ とする. $b \neq c$ であれば, ab を p で割った余りと, ac を p で割った余りは異なることを示せ.

(3) 各 a ($1 \leq a \leq p-1$) に対して, ab を p で割った余りが 1 となる b ($1 \leq b \leq p-1$) が存在することを示せ.

(4) $(p-1)!$ を p で割った余りが $p-1$ であることを示せ.

問題 III xy 平面において, 原点 $O(0,0)$ を中心とする半径 1 の円を C_1 とし, C_1 に点 $T(1,0)$ で外接する半径 r の円を C_2 とする. ただし, $0 < r < 1$ とする. C_1, C_2 の共通接線で, y 軸に平行ではなく, 傾きが負であるものを l とする. l と C_1, C_2 の接点をそれぞれ P, Q とし, l と x 軸との交点を R とする. 以下の問いに答えよ.

(1) P, Q から x 軸に下した垂線の足をそれぞれ A, B とする. 線分 AP および線分 BQ の長さをそれぞれ r を用いて表せ.

(2) 線分 AP , 線分 AT , 円弧 PT (2 つある円弧のうちの短い方) で囲まれた領域を x 軸の周りに回転させてできる立体の体積 V_1 を, r を用いて表せ.

(3) 三角形 PAR を x 軸の周りに回転させてできる立体の体積 V_2 を, r を用いて表せ.

(4) 右側極限 $\lim_{r \rightarrow +0} \frac{V_1}{V_2}$ を求めよ.