平成30年度学群編入学試験

理工学群数学類

学　力　検　査
（専門科目）
問　題　冊　子

注意事項

① 問題Ⅰ～Ⅴの全問題について解答すること。

② 解答用紙に印刷された問題番号を確認し、各問題の解答は指定された解答用紙に記入すること。

③ 解答が書ききれない場合には、「裏へ」と明記して、その解答用紙の裏面に続けて書くこと。

④ 下書き用紙は回収しない。

⑤ 試験時間は120分である。

問題 I　0と異なる実数 a, b, c に対して，$\mathbf{u} = (a, b, c)$ とし，$A = {}^t\mathbf{u}\mathbf{u}$ とおく．ただし，${}^t\mathbf{u}$ は $\mathbf{u}$ の転置とする．

(1) A の階数を求めよ．

(2) A の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(3) A が対角化可能であるかどうかを判定し，対角化可能であれば $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を求めよ．

問題 II　以下の命題の真偽を判定し, その根拠を述べよ.

(1) 線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ であって, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ かつ全射であるものが存在する.

(2) V を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とし, U_1, U_2 を V の部分空間とする. $V = U_1 \oplus U_2$ であれば, V の任意の部分空間 W について $W = (W \cap U_1) \oplus (W \cap U_2)$ が成り立つ.

(3) V を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とし, W を V の部分空間とする. $W \neq V$ であれば, V の部分空間 U であって, $U \supset W$ かつ $\dim U = \dim W + 1$ を満たすものが存在する.

問題 III　$f(x) = \log(1 + \sin x)$ とおく. 以下の問いに答えよ.

(1) $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)$ $(x \to 0)$ を満たす a_0, a_1, a_2, a_3 を求めよ. 但し，$o(\cdot)$ はランダウの記号 (スモール・オー) を表す.

(2) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + \sin x) - x}{3x^2}.$$

(3) $f\left(\frac{1}{3}\right)$ の近似値を誤差 $\frac{1}{100}$ 未満で求めよ (求めた近似値の誤差が $\frac{1}{100}$ 未満であることの根拠も述べること).

問題 IV 次の重積分を求めよ.

(1) $$\iint_D \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy, \qquad D=\left\{(x,y) \mid 1/4 \leqq x^2+y^2 \leqq 1\right\}.$$

(2) $$\iint_D (x+y)^3|x-y|e^{(x^2-y^2)(x-y)}dxdy,$$
$$D=\left\{(x,y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq 1\right\}.$$

問題 V $\mathbb{R}$ 上で定義された実数値関数の列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が与えられている.

(1) 「$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{R}$ 上で関数 $f(x)$ に各点収束する」の定義を述べよ.

(2) 「$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{R}$ 上で関数 $f(x)$ に一様収束する」の定義を述べよ.

(3) 次の関数列が $\mathbb{R}$ 上で定数関数 0 に一様収束するかを判定せよ.

$$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2} \quad (n=1,2,\ldots)$$

(4) $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{R}$ 上で関数 $f(x)$ に一様収束しているとする. すべての $n=1,2,\ldots$ について $f_n(x)$ が連続関数ならば, $f(x)$ も連続関数であることを示せ.