筑波大学理工学群　工学システム学類

平成 28 年度編入学試験
学力検査問題
(150 分)

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子の中を見てはいけません.
2. この問題冊子は，この表紙を含めて 5 ページあり，専門科目（数学，物理学）の各問題がまとめられています.
3. 問題数は，数学が 2 問，物理学が 2 問です.
4. 解答用紙と下書き用紙の定められた欄に，「学群・学類」，「氏名」，「受験番号」を記入してください.
5. 解答に際しては，数学，物理学の各問題で，別々の解答用紙を用いて下さい．解答用紙は，裏面を用いても構いません.
6. 解答用紙の上部の $\boxed{}$ 内に，数学問題 1，数学問題 2，物理学問題 1，物理学問題 2 と記入し，各問題に小問がある場合には，それらの小問の解答を全て要領良く記述して下さい.

数学

問題 1

(1) 次の関数 $f(x)$ について, 以下の設問に答えよ.

$$f(x) = \begin{cases} x\dfrac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1} & (x \neq 0) \\ a & (x = 0) \end{cases}$$

(a) すべての実数 x において連続となる a に関する条件を求めよ.

(b) 上記 (a) の条件のもとで, $x = 0$ における微分可能性を調べよ.

(c) 上記 (b) において微分可能である場合は $f'(0)$ を求めよ. 微分可能ではないが, 右側微分係数 $f'_+(0)$, 左側微分係数 $f'_-(0)$ が存在する場合は, それぞれを求めよ. ただし, 存在しない場合は, "存在しない" と答えること.

(2) 関数 $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ について, 以下の設問に答えよ.

(a) 原点を除いた領域において, ラプラス方程式を満足することを示せ.

(b) 広い意味の積分 $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leq 1} f(x, y)\, dxdy$ は存在するか. 存在するときはその値を求めよ.

(c) 複素数 $z = x + iy$ の関数 $f(x, y) + ig(x, y)$ が, 領域 $\mathrm{Re}\, z > 0\ (x > 0)$ において正則となるように, 関数 $g(x, y)$ を定めよ.

問題2

高々2次の実係数多項式全体が成す線形空間を $V=\{a+bx+cx^2 \mid a,b,c\in R\}$ とする. ただし, R は実数全体の集合であり, x は実数値をとる変数とする. また, 多項式 $f(x)$, $g(x)$ の和とスカラー倍は, $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$ と定義する. 以下の設問に答えよ.

(1) $\{1,\ 1+x,\ x+x^2\}$ は線形空間 V の基底となることを示せ.

(2) 任意の $f,\ g\in V$ に対して $(f,\ g)=f(-1)g(-1)+f(0)g(0)+f(1)g(1)$ なる演算を定義する. この演算 $(f,\ g)$ は以下の内積の性質それぞれを満たすことを示せ.

① 任意の $f,\ g\in V$ に対して $(f,\ g)=(g,\ f)$

② 任意の $f,\ g,\ h\in V$ に対して $(f,\ g+h)=(f,\ g)+(f,\ h)$

③ 任意の $f,\ g\in V$ と任意の実数 λ に対して $(\lambda f,\ g)=\lambda(f,\ g)$

④ 任意の $f\in V$ に対して $(f,f)\geq 0$ で, 等号成立は $f(x)=0$ のときに限る.

(3) (2)で定義した内積 $(f,\ g)$ のもとで $1,\ x,\ 3x^2-2$ は直交することを示せ. さらに, $1,\ x,\ 3x^2-2$ を正規化して V の正規直交基底を1組定めよ.

(4) (3)で求めた V の正規直交基底を $\{L_1,\ L_2,\ L_3\}$ とする. 線形空間 V から3次元の数ベクトル空間 R^3 への線形写像 φ を

$$\varphi(1)=c_1,\ \varphi(1+x)=c_2,\ \varphi(x+x^2)=c_3$$

で定めるとき, $\{L_1,\ L_2,\ L_3\}$ と $\{c_1,\ c_2,\ c_3\}$ に関する φ の表現行列 A_φ を求めよ. ただし, $c_1,\ c_2,\ c_3$ はR^3 の線形独立な数ベクトルとする.

(5) A_φ の行列式, 逆行列を求めよ.

物 理 学

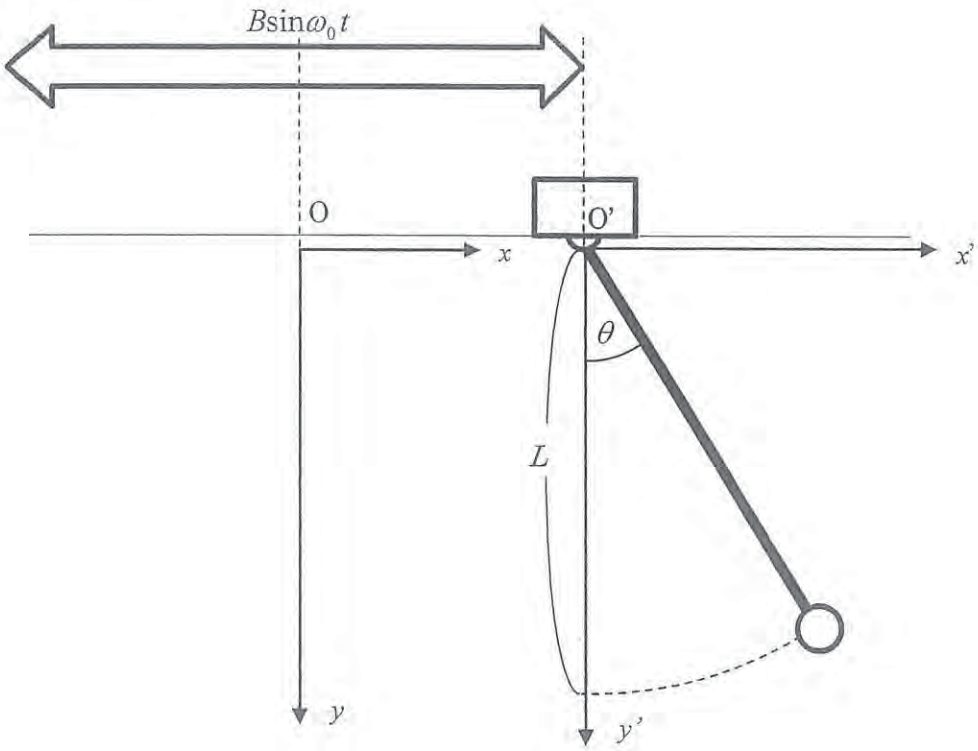
問題 1

下図のように水平面上を単振動する台があり，長さ L で重さが無視できる糸の先に質量 m のおもりをつないだ振り子が，この台の点 O'につるされている．原点を O とした慣性系の水平方向と鉛直下方の座標軸をそれぞれ x と y とする．また，台に固定された点 O'を原点とした O'系の水平方向と鉛直下方の座標軸をそれぞれ x' と y' とする．点 O'は慣性系に対して水平方向に変位 $B\sin\omega_0 t$ で単振動しているとする．なお，振り子の糸はたるむことはなく，台に接触しないものとする．B と ω_0 は定数であり，t を時刻，θ を y' 軸と糸のなす角，重力加速度を g とする．以下の設問に答えよ．ただし，導出過程についても示すこと．

(1) O'系におけるおもりの運動方程式を x', y' 方向についてそれぞれ示せ．ここで，糸の張力を T とする．

(2) (1)で示した運動方程式から x', y' および T を消去して，θ を用いておもりの運動方程式を示せ．

(3) 振り子の運動が微小振動とみなせる場合，(2)で示した運動方程式の一般解を示せ．



問題2

電荷Q_1が内部まで一様に分布している半径aの帯電体球が，それと同心で内半径b，外半径cの導体球殻で包まれている．下図は，これらの中心を通る断面を示している．導体球殻にはQ_2の電荷が与えられている．この系は真空中に置かれているとし，真空の誘電率をε_0とする．球の中心Oからの距離をrとする．無限遠方での静電ポテンシャル(電位)は0とする．以下の設問に答えよ．ただし，導出過程についても示せ．

(1) 帯電体球内部($r < a$)，帯電体球と導体球殻の間($a < r < b$)の電場をそれぞれ求めよ．

(2) 導体球殻内部($b < r < c$)，導体球殻外($c < r$)の電場をそれぞれ求めよ．

(3) 前問(1)と(2)の解答を用いて，この系全体がもつ静電場エネルギーを求めよ．

(4) 帯電体球と導体球殻の間($a < r < b$)における静電ポテンシャル(電位)を求めよ．