平成29年度学群編入学試験

理工学群数学類

学　力　検　査
（専門科目）
問　題　冊　子

注意事項

① 問題Ⅰ～Ⅴの全問題について解答すること。

② 各問題につき解答用紙は1枚である。解答が書ききれない場合には、「裏へ」と明記して、その解答用紙の裏面に続けて書くこと。

③ 下書き用紙は採点しない。

④ 試験時間は120分です。

問題 I a を 0 と異なる実数とし，3 次実正方行列を $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ a & a & 0 \end{pmatrix}$ で与える.

(1) A が与える数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の上の線形変換を

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

で表す．この f の核 $\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ および像 $\mathrm{Im}\, f = \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\}$ の基底を 1 組ずつ求めよ.

(2) $ABA = O$ を満たすすべての 3 次実正方行列 B の中で，階数が最大であるものを 1 つ求めよ．ただし O は零行列を表す.

問題 II $x = {}^t(x_1, x_2, ..., x_m)$ を正の成分をもつ実ベクトルとし，

$$A_x = D_x - \frac{x\ {}^t x}{\sum_{i=1}^m x_i}$$

とおく．ただし，D_x は $D_x = \mathrm{diag}(x_1, ..., x_m)$ なる対角行列，${}^t x$ は x の転置とする.

(1) 0 が A_x の固有値になることを示し，対応する固有ベクトルを求めよ.

(2) 任意の実ベクトル $y = {}^t(y_1, y_2, ..., y_m)$ に対して，${}^t y A_x y \geq 0$ を示せ.

問題 III $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi} x} \exp\left\{ -\dfrac{(\log_e x - \mu)^2}{2} \right\} \quad (0 < x < \infty;\ -\infty < \mu < \infty)$ とおく.

(1) $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_0^m f(x)dx = \frac{1}{2}$ となる m を求めよ.

(3) $\displaystyle\int_0^\infty x f(x)dx$ を求めよ.

問題 IV 次の問いに答えよ.

(1) 数列

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

が単調減少であることを示せ.

(2) 上の数列が, $C \geq \dfrac{1}{2}$ をみたすある定数 C に収束することを示せ.

(3) 広義積分

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right] \right) dx$$

の値を上の定数 C を用いて表せ. ただし, $[\alpha]$ は α を超えない最大の整数を表す.

問題 V 次の問いに答えよ.

(1) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束するならば有界であることを証明せよ.

(2) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta \in \mathbb{R}$ が成り立つとする. このとき等式 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$ を証明せよ.

(3) 区間 $I \subset \mathbb{R}$ 内の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I$ は $n \longrightarrow \infty$ のとき点 $\alpha \in I$ に収束し, 関数 f は点 $\alpha \in I$ で連続であるとする. このとき等式 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(\alpha)$ を証明せよ.

(4) 写像 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ の合成 $g \circ f : X \to Z$ は単射であるとする. このとき f も単射であることを示せ.