筑波大学理工学群社会工学類

平成29年度

編入学試験

学力検査問題

(数学)

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで，この問題の中身を見てはいけません．

2. すべての解答用紙と下書き用紙の定められた欄に，志望する「学群・学類」，「氏名」，「受験番号」をすべて記入すること．

3. 問題は6問あります．問題ごとにそれぞれ別の解答用紙（罫紙）を使用すること．

4. 解答用紙の裏面を使用しても構いません．

5. 解答用紙上部の細長い四角の枠内に問題番号を記入すること．

6. 試験終了後，解答用紙と下書き用紙を別々に集めます．問題冊子は持ち帰ってください．

問題 1 次の 3 変数連立 1 次方程式を考える．

$$\begin{cases} cx_1 + x_2 + x_3 = 2c, \\ x_1 + cx_2 + x_3 = c+1, \\ x_1 + x_2 + cx_3 = 3c-1. \end{cases}$$

ただし，c は定数である．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 一意の解が得られるときのすべての c の値を求めよ．またそれぞれの c に対応する解を求めよ．

(2) 解が存在しないときのすべての c の値を求めよ．

(3) 解が一組より多くなるときのすべての c の値を求めよ．またそれぞれの c に対応する解を求めよ．

問題 2 $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を次のように定義された線形写像とする．

$$F(x, y, z, w) = (x - y + z + w, 2x - 2y + 3z + 4w, 3x - 3y + 4z + 5w).$$

すべての $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ に対して，3 次元ベクトル $F(x, y, z, w)$ の集合は $\mathbb{R}^3$ の部分空間となる．それを $\mathrm{Im}(F)$ と表す．また，$F(x, y, z, w) = (0, 0, 0)$ となる 4 次元ベクトル (x, y, z, w) の集合は $\mathbb{R}^4$ の部分空間となる．それを $\mathrm{Ker}(F)$ と表す．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $\mathrm{Im}(F)$ の次元と基底ベクトルを求めよ．

(2) $\mathrm{Ker}(F)$ の次元と基底ベクトルを求めよ．

問題 3 以下の関数 $f(x, y)$ が原点 $(x, y) = (0, 0)$ で連続かどうかを，その理由とともに答えよ．

(1) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{y} & (y \neq 0) \\ 0 & (y = 0) \end{cases}$

(2) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2+3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$

問題 4 $E = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1 - \frac{x}{2}\}$ とする．$\mathbb{R}^2$ で定義された連続関数 $f(x,y)$ の E 上でのリーマン和は，それぞれの正整数 m に対して，

$$R_m(f) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m-i} f\left(\frac{2i}{m}, \frac{j}{m}\right) \frac{2}{m^2}$$

で与えられている．$f(x,y) = x + y$ であるとき，以下の問に答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の E 上でのリーマン和 $R_m(f)$ を求めよ．ただし，$\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$ である．

(2) (1) で得られたリーマン和を用いて，関数 $f(x,y)$ の E 上での二重積分を求めよ．

(3) 関数 $f(x,y)$ の E 上での累次積分を求めよ．

問題 5 X を非負値離散型確率変数とする．$a > 0$ に対して，以下の問に答えよ．

(1) 確率変数 I を次のように定義する．

$$I = \begin{cases} 1 & (X \ge a) \\ 0 & (0 \le X < a) \end{cases}$$

$Pr(A)$ を事象 A が真である確率を表すことにすると，I の期待値 $E(I)$ と「$X \ge a$ となる」確率 $Pr(X \ge a)$ は以下の等式 (i) を満たすことを示せ．

$$E(I) = Pr(X \ge a) \tag{i}$$

(2) 等式 (i) を用いて，$E(X)$ と $Pr(X \ge a)$ は以下の不等式 (ii) を満たすことを示せ．

$$Pr(X \ge a) \le \frac{E(X)}{a} \tag{ii}$$

(3) 不等式 (ii) を用いて，$Pr(|X - E(X)| \ge a)$ と X の分散 $V(X)$ は以下の不等式 (iii) を満たすことを示せ．

$$Pr(|X - E(X)| \ge a) \le \frac{V(X)}{a^2} \tag{iii}$$

問題 6 ある工場で製品Aが大量生産されているとき，製品Aの不良率 θ を推定することを考える．生産現場からランダムに大きさ n の標本を選び，不良品の数を調べる．X を不良品のとき 1，良品のとき 0 となる確率変数とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) パラメータ θ が与えられたとき，X が値 x をとる確率 $f(x;\theta)$ を求めよ．

(2) $x_1, \ldots, x_n$ を確率分布 $f(x;\theta)$ をもつ母集団からの無作為標本とするとき，この標本の同時確率を最大にするような θ を $\hat{\theta}$ と書く．$\hat{\theta}$ を求めよ．

(3) $\hat{\theta}$ が θ の不偏推定量になっていることを示せ．