

平成30年度応用理工学類編入学試験 学力検査問題

平成29年7月15日(土) 10:00～12:30

注意事項

- 1) この冊子には、数学1、数学2、物理学1、物理学2、化学1、化学2の計6題の問題がある。「物理学1、物理学2、化学1、化学2」から2題を選択し、数学1、数学2と合わせて4題を解答すること。下記の表も参照すること。

問題	解答用紙の種類	解答用紙の枚数	備考
数学1	罫線あり	2枚	必須
数学2	罫線あり	2枚	
物理学1	罫線あり	2枚	この中から 2題選択
物理学2	罫線あり	2枚	
化学1	罫線あり	2枚	
化学2	罫線あり	2枚	

- 2) 解答用紙の所定欄に学群、学類、氏名、及び受験番号を記入すること。
- 3) すべての解答用紙の氏名欄の下1行の欄に解答する問題名、すなわち、「数学1」、「数学2」、「物理学1」、「物理学2」、「化学1」、「化学2」のいずれかを明記すること。必要なら、解答用紙の裏も解答に用いてよい。
- 4) 机の上には「受験票」、「鉛筆」、「消しゴム」、「鉛筆削り」、「時計(計時機能だけのもの)」、「眼鏡」以外のものを置かないこと。

数学 1 試験問題

1. 図のような円柱座標系での微積分に関する以下の問いに答えよ。

- (1) 直交座標 (x, y, z) を円柱座標 (r, θ, z) に変換する。 $x, y, \frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial x}{\partial z}$ を r, θ, z の関数として示せ。

$$(2) \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = E \text{ が成り立つことに留意し, } \frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x} \text{ を}$$

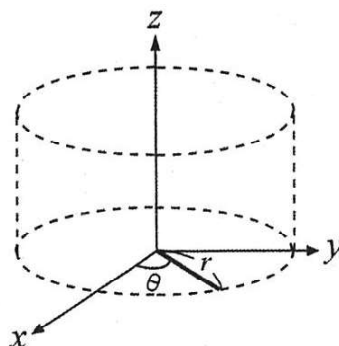
r, θ, z を用いて示せ。なお, E は単位行列である。

- (3) (2)の結果を用いると円柱座標系のラプラシアンは

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ で表される。関数 } f(r, \theta, z) = rz \cos \theta \text{ に対して } \Delta f \text{ を計算せよ。}$$

- (4) 円柱座標系で r だけを変数 ($r > 0$) とする関数 $g(r)$ が $\Delta g(r) = 0, g(1) = 0, g(e) = 2$ の条件を満たす。この $g(r)$ を求めよ。ただし, e は自然対数の底である。
- (5) x, y, z の r, θ, z に対するヤコビ行列式 (ヤコビアン) を計算せよ。
- (6) K を積分領域とする以下の三重積分を, 円柱座標系への変数変換を用いて計算せよ。ただし, a は正の定数である。

$$\iiint_K y^2 \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz, \quad K = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq a\}$$



数学 2 試験問題

1. 次の漸化式について考える。

$$\begin{cases} a_{n+1} = 7a_n - 6b_n \\ b_{n+1} = 3a_n - 2b_n \end{cases} \quad a_1 = 1, \quad b_1 = 0$$

以下の問いに答えよ。

- (1) $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ を満たす行列 A を求めよ。
- (2) A の固有値と固有ベクトルを求めよ。
- (3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P 、およびその逆行列 P^{-1} を求めよ。
- (4) a_n, b_n の一般項を求めよ。

2. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の多項式 $f(A) = A^5 - A^4 + A^3 - A^2 + A - E$ について、

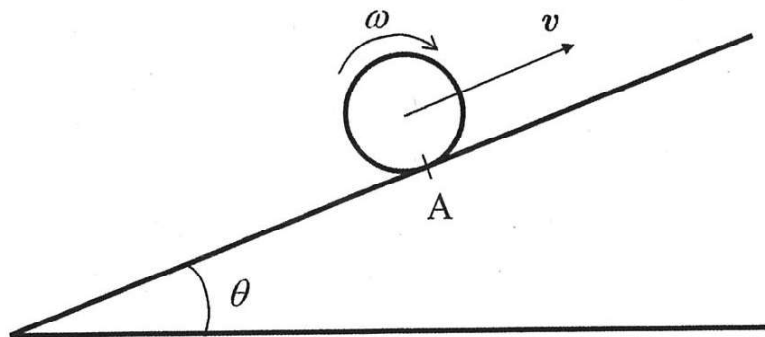
以下の問いに答えよ。ただし、 E は単位行列である。

- (1) A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ および固有ベクトルを求めよ。ただし、 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ となるようにとること。
- (2) A を $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1}$ と対角化する行列 P 、およびその逆行列 P^{-1} を求めよ。
- (3) $f(A)$ を求めよ。
- (4) $|f(A)|$ を求めよ。

物理学 1 試験問題

1. 図のような傾斜角が θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) である斜面と、半径 R 、質量 M 、密度が一般的な回転している円柱を考える。円柱の重心の速度を v 、回転の角速度を ω とし、それらの符号は図中の矢印の方向を正とする。時刻 $t=0$ において円柱の重心に斜面を上る方向に初速度 v_0 、初期角速度 ω_0 ($v_0 < R\omega_0$) を与えて点 A に置いた。このとき、円柱は斜面に対して滑っており、斜面を上る方向の摩擦力を受けている。斜面と円柱との間の動摩擦係数を μ ($0 < \mu < \frac{1}{3} \tan \theta$)、重力加速度を g として、以下の問いに答えよ。

- (1) 円柱の中心軸のまわりの慣性モーメント I が $I = \frac{1}{2} MR^2$ であることを示せ。
- (2) 円柱の重心の運動方程式と中心軸まわりの回転の運動方程式を書け。
- (3) \dot{v} と $\dot{\omega}$ を、 μ 、 M 、 R 、 g 、 θ のうち必要なものを用いて表せ。
- (4) v と ω を時刻 t の関数として求めよ。
- (5) 円柱の移動方向が上方から下方へ変化する地点、すなわち最高到達点に達する時刻 t_1 と、点 A から最高到達点までの移動距離を求めよ。
- (6) $\omega = 0$ となる時刻 t_2 を求めよ。



物理学2 試験問題

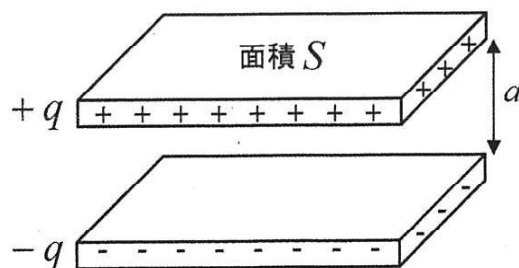
1. 2枚の平らな導体板を真空中に平行に並べた平行板コンデンサーについて考える。導体板の面積を S ，導体板の間隔を a とする。また，導体板の面積 S は十分大きく，導体板の端の効果は無視できるとする。真空の誘電率を ϵ_0 として，以下の問いに答えよ。

図のように，2枚の導体板それぞれに $+q$ と $-q$ の電荷を与える。

- (1) それぞれの導体板の電荷面密度 σ を求めよ。
- (2) 積分形のガウスの法則を用いて，(1)における導体板間に生じる電場の大きさを求め，電気力線を図示せよ。
- (3) 電場を導体板間で線積分することにより，導体板間の電位差を求めよ。

次に電氣的に中性な2枚の導体板を考える。片方の導体板からもう片方の導体板に微小な電荷量 Δq を移すことを繰り返し，それぞれの導体板に $+q$ と $-q$ の電荷を蓄える。

- (4) 微小な電荷量 Δq の移動に要する仕事量を積分することにより，この平行板コンデンサーに蓄えられた静電エネルギーを求めよ。
- (5) (4)の結果から，導体板間の空間における単位体積当たりの静電エネルギー u_e と，そこでの電場の大きさ E の間に成り立つ関係式を示せ。
- (6) 次に，導体板の間隔を微小な距離 Δa だけ大きくした。そのときの静電エネルギーの変化分を求めよ。またその結果から，導体板の間隔が a のときに導体板間に働く力の大きさを求めよ。
- (7) 導体板の面積を 1.0 cm^2 ，間隔を $10\text{ }\mu\text{m}$ とする。このコンデンサーに 1.0 V の電池をつなぎ，電荷移動が平衡に達したのち電池をはずした。このコンデンサーの電気容量および，導体板間に生じる引力を有効数字2桁まで求めよ。ただし $\epsilon_0 = 8.9 \times 10^{-12}\text{ Fm}^{-1} = 8.9 \times 10^{-12}\text{ C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$ を用いよ。



化学 1 試験問題

1. 反応 $A \rightarrow B$ について以下の問いに答えよ。反応速度は A の濃度の 1 次比例する。速度定数を k 、活性化エネルギーを E とする。また、時刻 t での A 、 B の濃度をそれぞれ C_A 、 C_B とし、 A の初濃度を C_{A0} とする。ここで逆反応は考えないことにする。

- (1) A の濃度の減少速度を表す速度式を示せ。
- (2) A の濃度が反応時間に対して指数関数的に減少することを示せ。
- (3) A の半減期 $t_{1/2}$ を求めよ。
- (4) 速度定数の頻度因子を ν 、反応温度を T 、気体定数を R として、 k を E 、 R 、 T および ν で表せ。

2. 酢酸水溶液の水酸化ナトリウム水溶液による滴定について以下の問いに答えよ。

- (1) 水溶液中における酢酸の解離平衡の式を示せ。
- (2) 酢酸の共役塩基の平衡とはどのような反応か。反応式で示せ。
- (3) 酢酸の解離に対する平衡定数を K_a とし、共役塩基の平衡定数を K_b とする。 K_a と K_b の積が 10^{-14} に等しいことを示せ。
- (4) 当量点では酸性かまたはアルカリ性か。そのようになる理由を 70 字程度で述べよ。
- (5) 当量点の半分の量の水酸化ナトリウムを添加したときの pH を、 K_a または K_b を用いて表せ。

3. CO のメタン化反応 ($\text{CO} + 3\text{H}_2 \rightarrow \text{CH}_4 + \text{H}_2\text{O}$) について以下の問いに答えよ。CO と H_2 のモル比は 1 : 3 である。気体定数を $8.31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ とし、有効数字 3 桁で答えよ。

- (1) 熱力学データ表を用いて、298.15 K, 全圧 1 気圧における反応熱を求めよ。
また、発熱または吸熱のいずれであるかを明記せよ。
- (2) 298.15 K における圧平衡定数 K_p は次式のように計算される。熱力学データ表を用いて、A に当てはまる数値を求めよ。単位は書かず、数値のみ書け。

$$K_p = \exp\left(\frac{A}{298.15 \times 8.31}\right)$$

- (3) 全圧を P , CO の平衡転化率を α とする時、平衡時の H_2 の分圧 P_{H_2} を P と α で表せ。CO がすべて反応した時を $\alpha = 1$ とする。

熱力学データ表

	$\Delta H^\circ(298.15) / \text{kJ mol}^{-1}$ (標準生成エンタルピー)	$\Delta G^\circ(298.15) / \text{kJ mol}^{-1}$ (標準生成自由エネルギー)
$\text{H}_2\text{O (g)}$	-241.8	-228.6
CO (g)	-110.5	-137.2
$\text{H}_2 \text{ (g)}$	0	0
$\text{CH}_4 \text{ (g)}$	-74.75	-40.75

化学2 試験問題

1. 以下の問いに答えよ。

(1) 以下の化合物の構造式を書け。

(a) シクロヘキサノンのエノール形 (b) フェノールのケト形

(2) ケト-エノール互変異性において、シクロヘキサノンとフェノールはエノール形が有利である。この理由をそれぞれ 60 字程度で説明せよ。

(3) ベンズアルデヒドはケト形のみで存在する。この理由を 40 字程度で説明せよ。

2. 以下の問いに答えよ。

(1) 以下の化合物のうち、幾何異性があるものをすべて選べ。また、その異性体構造が分かるように構造式を書け。

(a) 1-ペンテン

(b) 2-ヘキセン

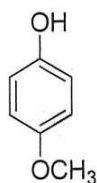
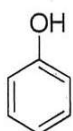
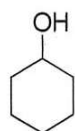
(c) 3-クロロプロペン

(d) 1,2-ジクロロ-1-デセン

(2) L-乳酸と D-乳酸をそれぞれフィッシャー投影式で書け。ただし、乳酸の組成式は $C_3H_6O_3$ である。

3. 以下の問いに答えよ。

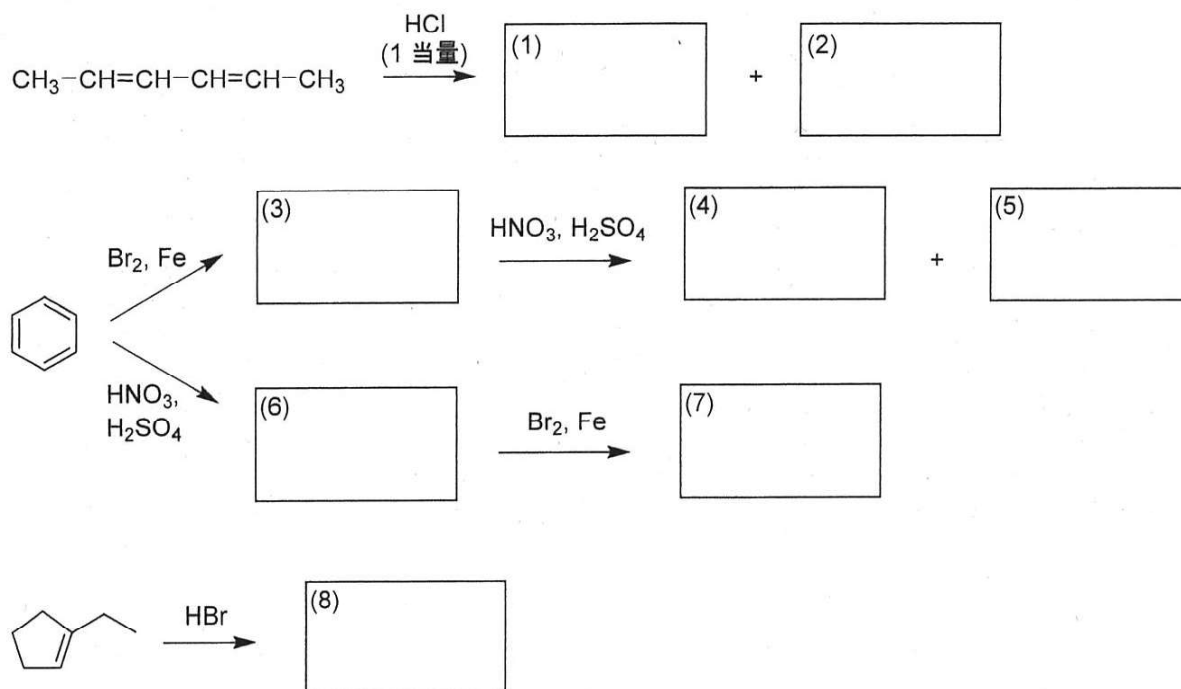
(1) 以下の化合物群から、最も酸性度の高いものを選べ。またその理由を 100 字程度で説明せよ。



(2) 以下の化合物において、ピロールはピリジンよりも塩基性が非常に弱い。その理由を化合物の芳香族性の観点から 100 字程度で説明せよ。



4. 以下の各反応における主生成物(1)～(8)の構造式を書け。また、(9)の問いに答えよ。ただし、2種類の生成物を記載する箇所は、いずれも主生成物とみなすこととする。また、ここでは幾何異性体の区別は問わないこととする。



- (9) 上の 2,4-ヘキサジエンと HCl の反応で(1), (2)の 2 種類の化合物が生成する理由を 150 字程度で説明せよ。