筑波大学理工学群　工学システム学類

# 平成30年度編入学試験

# 学力検査問題

# （150分）

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子の中を見てはいけません．
2. この問題冊子は，この表紙を含めて5ページあり，専門科目（数学，物理学）の各問題がまとめられています．
3. 問題数は，数学が２問，物理学が２問です．
4. 解答用紙と下書き用紙の定められた欄に，「学群・学類」，「氏名」，「受験番号」を記入してください．
5. 解答に際しては，数学，物理学の各問題で，別々の解答用紙を用いて下さい．解答用紙は，裏面を用いても構いません．
6. 解答用紙の上部の $\boxed{\phantom{xxxxxx}}$ 内に，数学問題１，数学問題２，物理学問題１，物理学問題２と記入し，各問題に小問がある場合には，それらの小問の解答を全て要領良く記述して下さい．

# 数　学

## 問題１

(1) $y$に関する以下の線形微分方程式の一般解を求めよ．

(a) $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{3}{x}y=2x^3+x^2+x$　　(b) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}-n^2y=0$ （$n$は定数）

(2) 留数定理を用いて，以下の定積分の値を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos mx}{x^2-2x+2}dx$$

ただし，$m$ は実定数とする．

(3) Newton 法は方程式 $f(x)=0$ を満たす解 $x$ の近似解を数値的に求める手法の１つである．具体的な手順は，以下の通りである．まず，漸化式

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\qquad n=0,1,2,\ldots$$

を構成する．ここで，$f'(x_n)=\frac{d}{dx}f(x_n)\neq 0$ とする．次に，この漸化式を適当な初期値 $x_0$の下で解き，数列 $x_1,x_2,\ldots$を計算する．解が存在する場合には，その収束値 $x_\infty$は $f(x_\infty)=0$ を満たす．

上述の Newton 法に関して，以下の設問に答えよ．

(a) Newton 法で $x_0$から$x_1$を求めることは，点$\left(x_0,f(x_0)\right)$ における$y=f(x)$の接線と$x$ 軸の交点を求めることになっている．これを示せ．

(b) Newton 法の漸化式から得られる数列 $\{x_n\}$, $n=0,1,\ldots$ は，初期値 $x_0$が $f(x)=0$ の解の近傍にあるときに収束し，その収束値は$f(x)=0$ の解を与える．これを以下の<定理>を用いて示せ．ただし，$f'(x)\neq 0$ かつ $f''(x)=\frac{d^2}{dx^2}f(x)$は連続であるとする．

＜定理＞

関数 $\varphi(x)$ が閉区間 $I$で微分可能で，$\varphi(x)$の値域は $I$に含まれ，$I$では

$$\left|\frac{d}{dx}\varphi(x)\right|\leq k<1$$

であるとする．このとき，反復法 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ によって方程式 $x=\varphi(x)$ のただ１つの根 $x_\infty$ が得られる．

## 問題2

$x$ の 2 次以下の実数係数の多項式 $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ 全体が作る線形空間 $\boldsymbol{V}$ と $\boldsymbol{W}$ について，$\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ の写像 $F$ は，$f(x)$ を $f(x) + f'(x)$ に移す写像とする．
ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ を微分した関数（導関数）を表す．以下の設問に答えよ．

(1) $F$ が上への 1 対 1 の線形写像であることを証明せよ．

(2) $\{x+1,\ x^2+x+1,\ 1\}$ が $\boldsymbol{W}$ の基底となることを証明せよ．

(3) $\boldsymbol{V}$ の基底 $\{x,\ -x^2+1,\ x^2-4x+3\}$ と $\boldsymbol{W}$ の基底 $\{x+1,\ x^2+x+1,\ 1\}$ に関する $F$ の表現行列 $A$ を求めよ．

(4) $A$ を対角化して，行列 $A^n$ を求めよ．（$n$ は正の整数）

# 物理学

## 問題 1

下図に示すように，質量$m$，重心$G$まわりの慣性モーメント$I_G$の直方体が，A 点，B 点において水平方向（$x$方向）ならびに鉛直方向（$y$方向）にバネ定数$k_1$，$k_2$の 2 本のバネでそれぞれ支持されている．$x-y$平面内における直方体の運動について，以下の設問に解答せよ．

ただし，重力（重力加速度を$g$）に伴う$y$方向の下向きの変位は微小とし，$x$方向，$y$方向，および，$\theta$方向の正の向きは図のとおりとする．また，回転角$\theta$の単位はラジアンとし，$\theta$の大きさが微小な場合には，近似式$\sin\theta \approx \theta$，$\cos\theta \approx 1$，$\theta^2 \approx 0$を用いてよい．

(1) 慣性モーメント$I_G$を求めよ．

(2) 回転角$\theta$が微小とした場合の直方体の運動方程式を，$x$方向，$y$方向，および，$\theta$方向のそれぞれの方向ごとに導出せよ．

(3) (2)より導出した運動方程式によれば，直方体の$y$方向の運動が，$x$方向および$\theta$方向の運動とは独立した単振動となることを定量的に説明せよ．

(4) バネ定数$k_1$，$k_2$を$k_2 = \dfrac{4}{3}k_1$と設定した場合について，$x$方向および$\theta$方向の運動に対する固有角振動数$\omega_1$，$\omega_2$（$\omega_1 < \omega_2$）を求めよ．

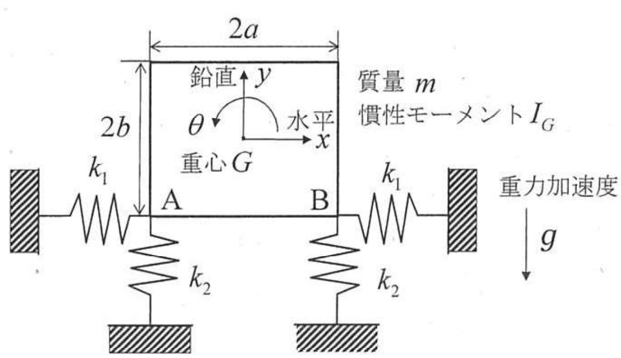
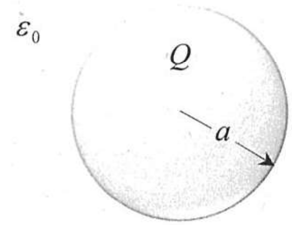



図　直方体の $x-y$ 平面内の運動

## 問題２

真空中（誘電率：$\varepsilon_0$〔F/m〕）において，一様な体積電荷密度とする全電荷量$Q$〔C〕で半径$a$〔m〕の球状電荷を形成することを考える．この作業に必要な仕事を以下の問いの手順に沿って求めよ．




(1) 形成した球状電荷について，体積電荷密度を$\rho$〔$C/m^3$〕として，全電荷量$Q$〔C〕を表せ．

(2) 空間での任意の場所における電界の強さ$E$〔V/m〕を仮定するとき，その場所での電界が有する単位体積あたりのエネルギー$W'$〔$J/m^3$〕を示すとともに，全空間でのエネルギー$W$〔J〕はどのように計算されるか説明せよ．

(3) 球状電荷の中心からの距離を$r$〔m〕として，$r \leq a$での電界の強さ$E_1$〔V/m〕および$r > a$での電界の強さ$E_2$〔V/m〕を，$\rho$と$r$の関数として求めよ．

(4) (1)～(3)の結果を踏まえて，結果としての全空間の電界が有するエネルギー，すなわち球状電荷を形成するのに相当する仕事$W$〔J〕を，$Q$と$a$を用いて示せ．

(5) 真空状態から，中心位置を起点に電荷を無限遠から徐々に運んで，体積電荷密度$\rho$〔$C/m^3$〕で一様に蓄積し，半径$a$になるまでの球状電荷を形成するための仕事が，(4)の電界が有するエネルギーと等しいことを示せ．