筑波大学理工学群応用理工学類

平成３１年度個別学力検査等(後期日程)

小 論 文 問 題

注意事項

1）試験開始の合図があるまでこの問題冊子の中を見てはならない。

2）この冊子には，［問題Ⅰ］から［問題Ⅲ］まで３題の問題がある。

3）解答用紙３枚の定められた欄に，受験する「学群，学類」，「氏名」，「受験番号」を記入すること。

4）すべての解答用紙上部の $\boxed{}$ 内に問題番号を記入すること。ただし、下の表のように各問題にそれぞれ１枚ずつの解答用紙を使用せよ。白紙の解答用紙も回収する。解答が書ききれない場合には，解答用紙の裏面を使用しても差し支えない。

問題番号	解答用紙
問題Ⅰ	1枚
問題Ⅱ	1枚
問題Ⅲ	1枚

問題 I

xy 平面内において $4py = x^2$（ただし $p > 0$）で表される放物線 C およびその線上を動く点 $\mathrm{Q}\left(a, \dfrac{a^2}{4p}\right)$（ただし $a > 0$ とする）について，以下の問いに答えよ。

(1) 点 Q における放物線 C の接線 T の方程式を求めよ。

(2) 点 Q を通り，問(1)で求めた接線 T に垂直な直線 N の方程式を求めよ。

(3) 点 Q を通る直線で，その直線が直線 N となす角が，直線 N が y 軸となす角と等しくなるもののうち y 軸に平行でないものを L とする。直線 L は，a の値によらずに，ある 1 点を通ることを示し，その点を求めよ。

(4) 問(3)で得られた直線 L と放物線 C とで囲まれる領域の面積を求めよ。さらに，a が変化するとき，その面積の最小値を与える a の値と，その面積を求めよ。

問題 II

Oを原点とする座標空間において3点 A $(2,0,0)$, B $(0,2,0)$, C $(0,0,4)$ をとる。以下の問いに答えよ。

(1) 三角形OABの重心をG_1，三角形ABCの重心をG_2とする。線分CG_1と線分OG_2とが 1 点で交わることを示せ。その交点をGとする。$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$および$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$を用いて表し，点Gの座標を求めよ。

(2) 点 $\mathrm{I}\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ を中心とする半径$\dfrac{1}{2}$の球面をS_1とする。また，線分OAの中点をMとし，線分MGを$1:t$（ただし$0<t<1$）に外分する点をPとする。点Pを中心とする半径$\dfrac{3\sqrt{2}-2}{4}$の球面S_2が球面S_1と外接しているとき，tの値と球面S_2の方程式を求めよ。

(3) 球面S_1と球面S_2の接点をQとする。点Qの座標を求めよ。

(4) 点Rを直線GQ上の点とするとき，2 点R，Iの距離が最小となる点Rの座標を求めよ。

問題 III

複素数αは$\alpha^6 = 64$を満たし，かつ，実部と虚部がともに正とする。また，複素数zに共役な複素数を$\overline{z}$で，複素数zの絶対値を$|z|$で表す。以下の問いに答えよ。ただし，虚数単位i，実数x, yを用いてzを$z = x + iy$と表すものとする。

(1) αを求めよ。

(2) 複素数平面上の$|z| = |z-2|$を満たす点の集合をC_1とする。C_1の満たす方程式をx, yを用いて表し，その概形を複素数平面上に図示せよ。

(3) 複素数平面上の$|z+\overline{\alpha}| = k|z-\overline{\alpha}|$を満たす点の集合を$C_2$とする。$C_2$の満たす方程式を$x, y, k$を用いて表し，その概形を複素数平面上に図示せよ。ただし，kは実数で$0 < k \leqq 1$とする。

(4) C_1とC_2の共有点を表す複素数をすべて求めよ。

(5) 複素数βは$k=1$の場合のC_2上の点に対応し，かつ，実部が正とする。このとき$(z-\beta)^6 = 64$の解の１つがαになるようなβの値を求めよ。