平成３１年度

理工学群数学類
私費外国人留学生入試

小　論　文
試　験　問　題

注意事項

① 問題Ⅰ～問題Ⅲを別々の解答用紙に日本語で解答してください。

② 試験時間は９０分です。

問題 I 2つの関数 $c(x)$ と $s(x)$ をそれぞれ

$$c(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad s(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

で定める. ここで, e は自然対数の底である (必要であれば e が無理数ということを証明なしに用いてよい). 以下の問いに答えよ.

(1) すべての実数 x, y について

$$s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y)$$
$$c(x+y) = c(x)c(y) + s(x)s(y)$$

が成り立つことを示せ.

(2) n を 0 以上の整数とする. $c(2^{-n})$ と $s(2^{-n})$ がともに有理数になることはあるか. あるならそのような n を 1 つ挙げ, ないなら理由を説明せよ.

(3) $8c(x)$ と $8s(x)$ がともに整数になる 0 以上の実数 x の個数を求めよ.

問題 II $f(x)$ は実数全体で定義された関数で, 第 2 次導関数 $f''(x)$ をもち, すべての実数 x について $f''(x) > 0$ が成り立つとする. 座標平面上の曲線 $C_1 : y = f(x)$ を考える. また, a を実数とし, r を正の実数とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 座標平面内の半径 r の円 $C_2 : (x-s)^2 + (y-t)^2 = r^2$ は, 中心の y 座標 t が $f(a)$ よりも大きく, 曲線 C_1 と点 $(a, f(a))$ において接しているとする. このとき, s, t をそれぞれ $f(a)$, $f'(a)$, a, r を用いて表せ.

(2) (1) で求めた円 C_2 の下側の半円を表す曲線を $y = g(x)$ $(s - r \leqq x \leqq s + r)$ とする. $g''(a) = f''(a)$ が成り立つとき, 円の半径 r を $f'(a)$, $f''(a)$ を用いて表せ.

問題 III $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とおく．複素数 z に対して次の 2 つの操作 (A), (B) により別の複素数を作る．

(A) z に ω を加える．

(B) z に ω をかける．

$z=0$ から始めて, (A) と (B) を組合せて繰り返し行い, 新しい複素数を作っていく．例えば, $z=0$ に (A) を 3 回, 次に (B) を 2 回, 最後に (A) を 2 回行えば, $3\omega^3+2\omega$ が作られる．以下の問いに答えよ．

(1) $\omega^2+\omega+1=0$ を示せ．

(2) k, m, n を正の整数とする．$z=0$ から始めて, (A) を k 回, 次に (B) を 1 回, 次に (A) を m 回, 次に (B) を 1 回, 最後に (A) を n 回行って作られる複素数を z' とする．z' が $a+b\omega$ (a, b は整数) の形に表せることを示し, a, b をそれぞれ k, m, n を用いて表せ．

(3) 整数 p, q を任意にとる．$z=0$ から始めて, (A) と (B) をうまく組合せて繰り返し行えば, 複素数 $p+q\omega$ を作ることができることを示せ．

(4) (A) と (B) をどのように組合せて繰り返し行っても, $z=0$ から始めて複素数 $1+i$ を作ることはできないことを示せ．