平成 31 年度学群編入学試験

理工学群数学類

学　力　検　査
(専門科目)
問　題　冊　子

注意事項

① 問題Ｉ～Ｖの全問題について解答すること。

② 解答用紙に印刷された問題番号を確認し、各問題の解答は指定された解答用紙に記入すること。

③ 解答が書ききれない場合には、「裏へ」と明記して、その解答用紙の裏面に続けて書くこと。

④ 下書き用紙は回収しない。

⑤ 試験時間は 120 分である。

問題 I　2つの実数 a, θ に対して, 3次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

で定める.

(1) A^2 の行列式を求めよ.

(2) A^2 の階数を求めよ.

(3) $\mathbb{R}^3$ の部分空間 V を

$$V = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A^2\mathbf{x} = \mathbf{x} \right\}$$

で定める. このとき, V の次元を求めよ.

問題 II　実数を成分とする2次正方行列全体のなす $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間を $M_2(\mathbb{R})$ で表す. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ とし, $a \neq d$ と仮定する. $M_2(\mathbb{R})$ 上の線形変換 f_A を

$$f_A(X) = AX - XA \qquad (X \in M_2(\mathbb{R}))$$

により定める.

(1) $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく. $f_A(X_1)$, $f_A(X_2)$ は線形独立であることを示せ.

(2) f_A の核の次元が2であることを示せ.

問題 III　α を実数の定数とし, n を2以上の整数とする.

$$f(x, y) = (y - x)^n + x^2 + \alpha y^2$$

に関する以下の問いに答えよ.

(1) $f(x, y)$ の1次および2次の偏導関数をすべて求めよ.

(2) $f(x, y)$ が $(x, y) = (0, 0)$ において極値を取るかどうか判定せよ.

問題 IV

(1) $f(x)$ は $x \geqq 0$ において定義された実数値連続関数であって, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して広義積分 $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ が収束すると仮定する. このとき, 任意の正の実数 a, b $(a < b)$ に対して, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx.$$

(2) $f(x)$ は (1) の仮定を満たすとする. (1) の等式を用いて, 任意の正の実数 a, b $(a < b)$ に対して,

$$\int_{0}^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \log \frac{b}{a}$$

が成り立つことを示せ.

(3) 次の広義積分の値を求めよ.

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^2} dx.$$

問題 V　2つの実数 a, b に対して, 実数 $a \vee b$ を

$$a \vee b = \max\{a, b\}$$

で定める.

(1) 実数 a, b に対して,

$$a \vee b = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$$

が成り立つことを示せ.

(2) $\mathbb{R}$ の部分集合 A, B に対して, $\mathbb{R}$ の部分集合 $A \vee B$ を

$$A \vee B = \{a \vee b \mid a \in A,\ b \in B\}$$

で定める. A, B がともに上に有界であれば, $A \vee B$ も上に有界であることを示し, さらに

$$\sup(A \vee B) = (\sup A) \vee (\sup B)$$

が成り立つことを示せ.