平成 31 年度学群編入学試験

理工学群物理学類

学　力　検　査
（専門科目）
問　題　冊　子

注意事項

① 問題Ⅰ～Ⅲのすべてに解答すること。

② 解答用紙は各問題に対して1枚使用し、それぞれの解答用紙には「問題Ⅰ」のように問題番号を明記すること。

③ 解答が書ききれない場合には、「裏へ」と明記して、その解答用紙の裏面に続けて書くこと。

④ 下書き用紙は採点しない。

⑤ 試験時間は120分です。

問題 I

図 1 の様に、なめらかな円錐の内面を質量 m の質点が運動している。重力が鉛直下方に重力加速度 g で働いているとする。質点の位置を円筒座標 (r, θ, z) で図 1 の様に表す。このとき $z = ar$（a：正の定数）とする。以下の問いに答えよ。

問 1. r 方向、θ 方向、z 方向の質点の運動方程式を書け。ただし、円錐からの垂直抗力を T とせよ。

問 2. z 軸まわりの角運動量 $L = mr^2\dot{\theta}$ が保存量であることを、θ 方向の運動方程式から示せ。

問 3. 角運動量 $L = mr^2\dot{\theta}$ と $z = ar$ を使って、以下の r に対する微分方程式を導け。

$$(1 + a^2)\,\ddot{r} - l^2/r^3 = -ga \tag{1}$$

ここで、$l = L/m = r^2\dot{\theta}$ である。

問 4. 質点のエネルギー E が以下で書けることを示せ。

$$E/m = \frac{1}{2}(1 + a^2)\,\dot{r}^2 + \frac{1}{2}l^2/r^2 + gar \tag{2}$$

ここで、$l = L/m = r^2\dot{\theta}$ である。

次に、図 2 の様に、時刻 $t = 0$ で質点の位置を $r = r_0$ に、初速度を水平方向に v_0 にしたとする。

問 5. 特別な値：$r_0 = \bar{r}, v_0 = \bar{v}$ のとき、r の値は変化せず一定値：$r = r_0 = \bar{r}$ であった。このとき、$\bar{r}, \bar{v}$ の関係を求めよ。

問 6. 以下では、一般の r_0, v_0 の場合について考えよう。$t = 0$ でのエネルギー E は以下である。

$$E/m = \frac{1}{2}v_0^2 + gar_0 \tag{3}$$

(3) のエネルギーと、(2) であたえられる時刻 t でのエネルギーが等しいことから以下を導け。

$$\frac{1}{2}(1 + a^2)\,\dot{r}^2 \cdot r^2 = (-ga)(r - r_0)(r - \alpha)(r - \beta) \tag{4}$$

ここで、

$$\alpha = r_0\left(p/4 + \sqrt{(p/4)^2 + (p/2)}\,\right) \tag{5}$$

$$\beta = r_0\left(p/4 - \sqrt{(p/4)^2 + (p/2)}\,\right) \quad , \quad p = v_0^2/(gar_0) \tag{6}$$

である。

問 7. (4) から、r は r_0 と α の間の値をとること、すなわち $r_0 \le r \le \alpha$ 、あるいは $\alpha \le r \le r_0$ であることを示せ。

問 8. $r_0 = \bar{r},\, v_0 = \bar{v}(1+\delta)$ の場合の質点の運動を考えよう。ここで、$\bar{r}, \bar{v}$ は 問 5 の場合のものであり、δ は微小量であるとする。このとき、時刻 t では、r は $\bar{r}$ からわずかにずれた値をとると考えられる。そこで、

$$r = \bar{r}\,(1+\xi) \tag{7}$$

として、(1) に代入し、ξ の満たす微分方程式を導くことを考えよう。δ と ξ は微小量なので、二次以上は無視できるとする。このとき、 ξ の満たす微分方程式が以下であることを示せ。

$$\ddot{x} = -\,\Omega^2\left(\xi - \frac{2}{3}\delta\right) \tag{8}$$

ここで、

$$\Omega = \sqrt{\frac{3ag}{(1+a^2)\,\bar{r}}} \tag{9}$$

である。

問 9. 微分方程式 (8) を、時刻 $t=0$ での初期条件を顧慮しながら解き、ξ を求めよ。

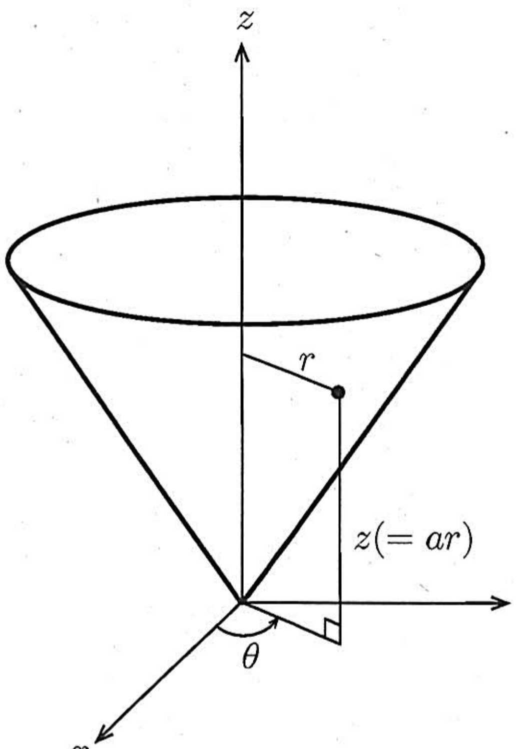

図 1

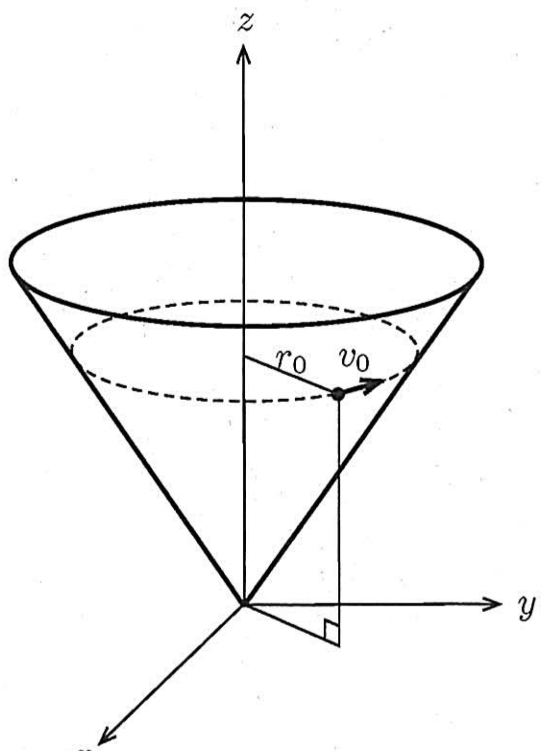

図 2

問題II

nモルの理想気体を考える。この理想気体は体積V、圧力p、絶対温度Tの状態にあるとき状態方程式$pV = nRT$が成立する（Rは気体定数）。なお理想気体の内部エネルギーUは体積Vによらず$U(T)$のように表される。以下の問題では、内部エネルギー$U(T)$は絶対温度に比例するとして良いとする。以下の問に答えよ。

(A) 体積Vを一定に保った条件でこの気体に熱量ΔQ (> 0)を加えたところ、気体の温度がΔT_V上昇した。

問1. 1モルあたりの気体の定積比熱C_Vを求めよ。

問2. 絶対温度Tでのこの気体の内部エネルギー$U(T)$を、n, C_V, Tを用いて表せ。

(B) 今度は圧力pを一定に保ち熱量ΔQを加えた時、気体の温度はΔT_p上昇した。

問3. 1モルあたりの気体の定圧比熱C_pを求めよ。

問4. (A)の温度上昇ΔT_VとΔT_pはどちらが大きいか、理由を付けて答えよ。

問5. 熱力学第一法則を用いて、$C_p = R + C_V$を示せ。

(C) 今度は準静的断熱過程により体積をVから$V + \Delta V$に減少させた(ただし$\Delta V < 0$とする)。

問6. この時気体の温度はΔTだけ変化した。ΔTの正負を理由をつけて述べよ。

問7. $\frac{\Delta T}{\Delta V}$を$T, V, R, C_V$を用いて表せ。

問8. 問8において$\Delta T, \Delta V$が十分小さいとして得られる微分方程式を解き、準静的断熱過程の変化においては

$$pV^\gamma \;=\; 一定$$

であることを示せ。なお$\gamma = \frac{C_p}{C_V}$である。

(D) 最後に、この気体を等温自由膨張により体積を V_1 から V_2 に増大させた。ただし $V_2 > V_1$ である。

問 9. 温度を T として、この系のエントロピーの増分 ΔS を求めよ。

問 10. 等温変化における体積に対する圧力の変化 $\left(\frac{dp}{dV}\right)_T$ と (C) 問 8 で考察した準静的断熱変化における体積に対する圧力の変化 $\left(\frac{dp}{dV}\right)_{\mathrm{ad}}$ の比を求めよ。

問題 III

直交座標系x軸、y軸、z軸を考え、z軸上の$z = a$の点 A に$+Q$の電荷、$z = -a$の点 B に$-Q$の電荷がある。真空の誘電率をε_0として以下の問に答えよ。

問１．二つの電荷が点(x, y, z)につくる電位ϕを求めよ。

問２．原点近傍$\left(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ll a\right)$における電位$\phi$を求めよ。このとき、$r/a$の２次以上の項は無視できるとする。

問３．このときの原点近傍における電場$\boldsymbol{E}$を求めよ。

問４．点 A、B より十分遠方$(r \gg a)$での電位ϕを電気双極子モーメント$\boldsymbol{p}$を用いて表せ。このとき、等電位面はどのような式で表されるか述べよ。a/rの２次以上の項は無視できるとする。また、z軸からの角度をψとして極座標を用いてもよい。

問５．このときの十分遠方での電場$\boldsymbol{E}$を求めよ。

問６．図１のようにz軸から角度θの方向で一様な外部の電場E_0があるときに、この電気双極子はどのような力をうけるか述べよ。

問７．問６で$\theta = 0°$のとき、電気双極子の代わりに原点 O を中心とし半径Rの導体球を置く。導体球周辺の電場と同じ電場を作るには、どのような電気双極子モーメントを原点Oに置けばよいか述べよ。

問８．図２のように点 A の電荷も$-Q$にし、原点に$+2Q$の電荷を置く。xy平面上で点 A、B より十分遠方$\left(r = \sqrt{x^2 + y^2} \gg a\right)$での電場$E$を$r$の関数として表せ。ただし、$a/r$の２次の項まで残した近似を使うこと。

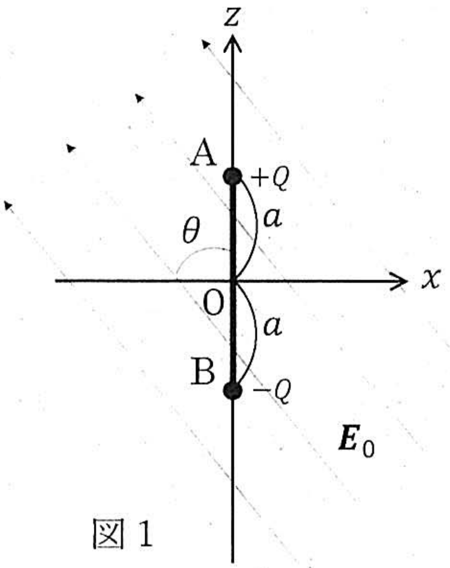

図 1

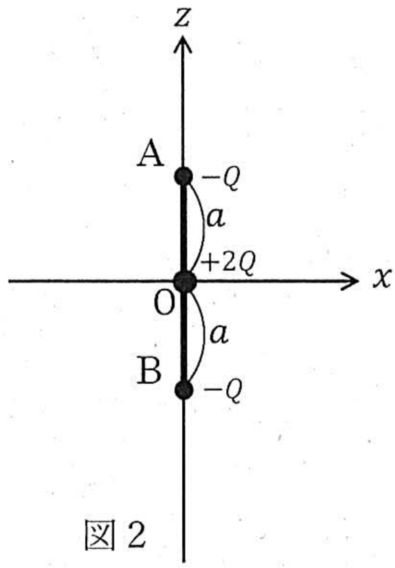

図 2