筑波大学理工学群　工学システム学類

平成31年度編入学試験

学力検査問題

（150分）

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子の中を見てはいけません．
2. この問題冊子は，この表紙を含めて6ページあり，専門科目（数学，物理学）の各問題がまとめられています．
3. 問題数は，数学が２問，物理学が２問です．
4. 解答用紙と下書き用紙の定められた欄に，「学群・学類」，「氏名」，「受験番号」を記入してください．
5. 解答に際しては，数学，物理学の各問題で，別々の解答用紙を用いて下さい．解答用紙は，裏面を用いても構いません．
6. 解答用紙の上部の $\boxed{\qquad\qquad}$ 内に，数学問題１，数学問題２，物理学問題１，物理学問題２と記入し，各問題に小問がある場合には，それらの小問の解答を全て要領良く記述して下さい．

数学1試験問題

1．2変数関数 $f(x,y)$ に関する以下の[A], [B]の2つの問いに答えよ。

[A] $f(x,y)=xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ とする。

(1) $f(x,y)$ の停留点をすべて求めよ。

(2) (1)で求めた停留点のうち，x 座標および y 座標がともに正の点を (a,b) とする。$f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ で極値をとるかどうか判定せよ。極値をとる場合は極大と極小のどちらであるか，根拠とともに述べよ。

(3) x,y が $xy=4$ かつ $x>0$ を満たすとき，$f(x,y)$ の最大値を求めよ。

[B] $f(x,y)=x^2+y^2$ とし，xyz 直交座標系において曲面 $S:z=x^2+y^2$ を考える。この座標系上の点を (x,y,z) と表し，座標系の原点を $\mathrm{O}(0,0,0)$ とする。

(4) 点 A $(1,1,2)$ における曲面 S の接平面を π とする。π の方程式を求めよ。

(5) (4)の接平面 π と平行で原点 O を通る平面を π_0 とし，平面 π_0 と曲面 S の交線の xy 平面への正射影を曲線 C とする。C はどのような図形になるか。

(6) (5)の平面 π_0 と曲面 S で囲まれる領域を D とする。このとき，3重積分

$$I=\iiint_D (x^2+y^2)\,dxdydz$$

の値を求めよ。

数学 2　試験問題

1. 行列

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ。

(1)　A のすべての固有値と，それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ。なお，固有ベクトルはその第1成分を1とせよ。

(2)　$P^{-1}AP=D$ が対角行列となるように，3 次正則行列 P とその逆行列 P^{-1} の組を求めよ。なお，D の対角要素は大きい順に並べ，P の第1行の要素はすべて1とせよ。

(3)　自然数 n に対して，ベクトル

$$\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{pmatrix}=\left(A+2E\right)^n\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

の各成分を n の関数として求めよ。ここで E は単位行列である。

(4)　3 次元空間の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$，その転置ベクトルを ${}^t\boldsymbol{r}=\left(x,y,z\right)$ とするとき，${}^t\boldsymbol{r}(A+E)\boldsymbol{r}=1$ で表される曲面 M は，直交変換 $\left(x,y,z\right)\to\left(X,Y,Z\right)$ によって標準形

$$\alpha X^2+\beta Y^2+\gamma Z^2=1$$

にすることができる。$\alpha>\beta>\gamma$ となるように定数 α,β,γ を定めよ。

(5)　(4)における曲面 M に対して

$$\boldsymbol{r}\to R\boldsymbol{r}$$

で表される回転を施したら，xy 平面，yz 平面，zx 平面いずれに関しても対称な図形となった。このような回転を表す行列 R をひとつ求めよ。

物理学１　試験問題

１．　図に示すように，質量M，半径a，慣性モーメントIのボールが，重心の速度$\boldsymbol{v}=(v_x, v_y)$，$xy$平面内での重心のまわりの回転の角速度$\omega$で運動して，床に弾性的に衝突してはね返った．衝突する前の速度は$\boldsymbol{v}_0=(v_{0x}, v_{0y})$，重心のまわりの回転の角速度は$\omega_0$，はね返った後の速度は$\boldsymbol{v}_1=(v_{1x}, v_{1y})$，重心のまわりの回転の角速度は$\omega_1$となった．このとき，ボールは時刻$t=0$で床に接触し，$\Delta t$後に床から離れるとする．重力は無視できる，ボールの密度は一様, 衝突前後の速度のy成分の大きさは変化しないものとして以下の問いに答えよ．

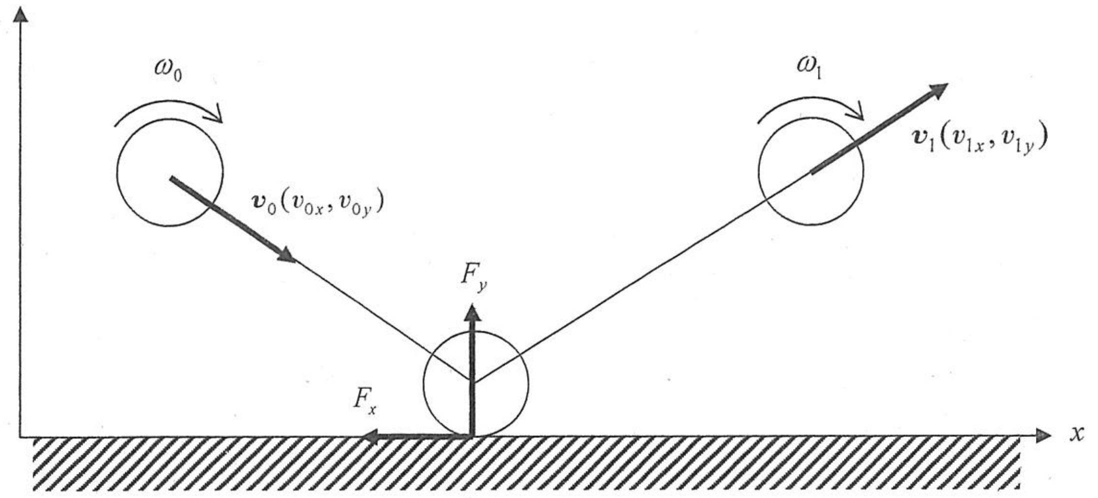
なお，このボールの重心のまわりの慣性モーメントは$I=\dfrac{2}{5}Ma^2$で与えられるとする．

（１）時刻$t=0$から$t=\Delta t$の間，図に示すように一定の力$\boldsymbol{F}=(-F_x,\ F_y)$がボールに働いたとする．このときの重心の並進運動の運動方程式および重心のまわりの回転に対する運動方程式を示せ．

（２）運動方程式を$t=0$から$t=\Delta t$まで積分して，はね返る前後のx方向の速度v_{0x}，v_{1x}と角速度ω_0，ω_1の関係を示せ．

（３）衝突前後のボールのエネルギーが保存されることを用いて，はね返る前後の速度と角速度の関係を示せ．

（４）はね返った後のx方向の速度v_{1x}と角速度ω_1を，はね返る前のx方向の速度v_{0x}と角速度ω_0を用いて示せ．

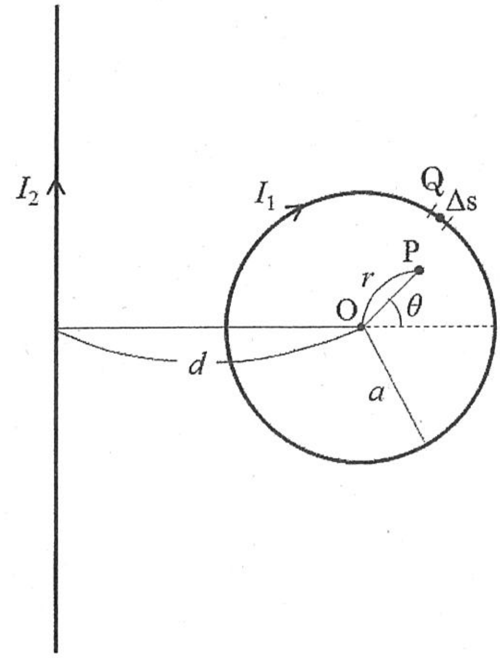


物理学２　試験問題

1. 図のように，長い直線状導線と半径aの円形の導線とが同一平面内に置かれている。円の中心Ｏから直線までの距離dはaより大きく，直線状導線は十分長く端の効果は無視できるとする。また，円内および円上の点の位置を表すために図のように点Ｏを原点とする極座標(r,θ)を取る。両導線は真空中にあり，両導線の太さは無視できるものとする。真空の透磁率をμ_0として，以下の問いに答えよ。必要であれば，積分公式

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{A + B\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{A^2 - B^2}} \qquad (A > B > 0)$$

を用いよ。



初めに，円形導線にのみ定常電流I_1を流す場合を考える。

(1) 点Ｏに生じる磁束密度の大きさを求めよ。必要であれば，ビオ・サバールの法則

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi}\int_C \frac{\boldsymbol{t}(\boldsymbol{r}') \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}\, ds$$

を用いよ。ここで，$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{r}')$は点$\boldsymbol{r}'$における電流の向きを表す単位ベクトル，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$は点$\boldsymbol{r}$に生じる磁束密度，積分は電流が流れる経路Ｃに沿った線積分である。

次に，直線状導線にのみ定常電流I_2を流す場合を考える。

(2) 点$\mathrm{P}(r,\theta)$に生じる磁束密度の大きさをアンペールの法則を使って求めよ。

(3) 円を貫く磁束を求めよ。また，直線状導線と円形導線との間の相互インダクタンスMを求めよ。

次に，図に示す矢印の向きに，円形の導線に定常電流I_1を流し，かつ，直線状導線に定常電流I_2を流す場合を考える。

(4) 円上の点$\mathrm{Q}(a,\theta)$にある長さΔsの電流素片$I_1\Delta s$に，I_2がつくる磁場$\boldsymbol{B}$から働く力$\Delta\boldsymbol{F}=I_1(\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{B})\Delta s$ の大きさを求めよ。また，その向きを答えよ。ここで，$\boldsymbol{t}$は点QでのI_1の向きを表す単位ベクトルである。

(5) $\Delta\boldsymbol{F}$を円形導線全体で合成することにより，円形導線全体に働く力の向きと大きさFを求めよ。

(6) 以下の文章の①～⑦に当てはまる数式を$\Delta t, \Delta M, I_1, I_2$を使って表せ。

「電流I_1, I_2を保ったまま，短い時間Δtの間に直線状導線と円形導線との間の距離をdから$d+\Delta d$に変えたところ，相互インダクタンスMが$M+\Delta M$に変化した。このとき，直線状導線および円形導線にはそれぞれ$-\Delta MI_1/\Delta t$，$-\Delta MI_2/\Delta t$ の誘導起電力が生じる。電流I_1, I_2を保つためには，直線状導線および円形導線にそれぞれ$\varphi_L=\boxed{①}$，$\varphi_C=\boxed{②}$の起電力を外から加えなければならない。時間Δtの間に，直線状導線と円形導線内ではそれぞれ$\boxed{③}$，$\boxed{④}$の電荷が移動するので，起電力φ_L，φ_Cがする仕事ΔWは$\varphi_L\times\boxed{③}+\varphi_C\times\boxed{④}=\boxed{⑤}$となる。一方，(3)で求めた$M$と(5)の結果を使うと，この過程で外から加える力学的仕事は$F\Delta d=\boxed{⑥}$と書ける。したがって，エネルギーの保存から，磁場のエネルギーの変化量は$\Delta U=\boxed{⑦}$となる。」