筑波大学理工学群社会工学類

平成31年度

編入学試験

学力検査問題

（数学）

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで，この問題の中身を見てはいけません．

2. すべての解答用紙（罫紙）と下書き用紙の定められた欄に，志望する「学群・学類」，「氏名」，「受験番号」をすべて記入すること．

3. 問題は6問あります．問題ごとにそれぞれ別の解答用紙を使用すること．

4. 解答用紙の裏面を使用しても構いません．

5. 解答用紙上部の細長い四角の枠内に問題番号を記入すること．

6. 試験終了後，解答用紙と下書き用紙を別々に集めます．問題冊子は持ち帰ってください．

問題 1 以下の問に答えよ.

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が一次独立であるとき, ベクトル $3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}$ は一次独立であるか否かを示せ.

(2) 次の $\boldsymbol{a}_1$ から $\boldsymbol{a}_5$ のベクトルの中で, 一次独立であるベクトルの数が最大となる一次独立ベクトルの組を 1 つ示せ. また, その他のベクトルを一次独立ベクトルの線形結合により表せ.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_5 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

問題 2 次の行列 A について, 以下の問に答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

(1) A の固有値を全て求めよ.

(2) (1) で求めた全ての固有値に対して固有ベクトルを求めよ.

(3) A は対角化可能か述べよ. また, 対角化可能ならば, $P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P を求めよ.

問題 3 次の説明を読んで．以下の問に答えよ．

ラグランジュの未定乗数法を用いて．楕円体．

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \quad a>0.\ b>0.\ c>0.$$

に内接する直方体の体積の最大値とそのときの頂点の座標を求めたい．ただし．直方体の各辺は，いずれも x 軸．y 軸．z 軸のどれかに平行であるものとする．

(1) 楕円体に内接する直方体の 8 つの頂点の 1 つを (x, y, z) (ただし．$x>0$．$y>0$．$z>0$) としたとき．3 方向の辺の長さ l_x, l_y, l_z と．楕円体に内接する直方体の体積 $V(x, y, z)$ を変数 x, y, z を用いてそれぞれ数式として表せ．

(2) 直方体が楕円体に内接するという条件を満たす特異点がないことを示せ．

(3) 体積 $V(x, y, z)$ を最大化する頂点の座標 (x, y, z) とその体積を求めるための．具体的なラグランジュ関数 $F(x, y, z)$ を示せ．ただし．未定乗数を λ とせよ．

(4) (3) で定式化した数式を用いて．楕円体に内接する直方体の体積を最大化する頂点の座標 (x, y, z) とその体積を求めよ．ただし．$x>0$．$y>0$．$z>0$ とする．

問題 4 次の説明を読んで．以下の問に答えよ．

下記の 2 重積分を変数変換によって求めることを考える．

$$I=\int\int_D (4x^2-y^2)e^{8xy}dxdy. \quad D=\left\{(x, y)\ \middle|\ 0\le 2x+y\le 1.\ 0\le x-\frac{1}{2}y\le 1\right\}.$$

(1) $u=2x+y$．$v=x-\frac{1}{2}y$ と変数変換したとき．変数の組 (u, v) の積分領域 E を示せ．

(2) E から D への写像関数のヤコビアンを求めよ．

(3) I を求めよ．

問題 5 次の説明を読んで，以下の問に答えよ．

確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ は互いに独立で，平均 μ，分散 σ^2 のある同一の確率分布に従うとする．ここで，2 つの μ の推定量，

$$\widehat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} v_i X_i, \quad \widetilde{\mu} = \sum_{i=1}^{n} w_i X_i,$$

を考える．ただし，$-\infty < \mu < \infty$，$0 < \sigma^2 < \infty$，

$$v_i = \frac{2(n+1-i)}{n(n+1)}, \quad w_i = \frac{2(n-i)}{n(n-1)},$$

で，n は 2 以上の整数である．なお，解答の際には，

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

を利用して良い．

(1) $\widehat{\mu}$ が μ の不偏推定量であることを示せ．

(2) $\widetilde{\mu}$ が μ の不偏推定量であることを示せ．

(3) $\widehat{\mu}$ の分散を求めよ．

(4) $\widetilde{\mu}$ の分散を求めよ．

(5) (1)〜(4) から，$\widehat{\mu}$ と $\widetilde{\mu}$ どちらの推定量がより μ の推定に適していると言えるか，その理由とともに答えよ．

問題 6 次の説明を読んで，以下の問に答えよ．

テレビ番組 A の第 1 週の世帯視聴率 p および第 2 週の世帯視聴率 q を考える．第 1 週および第 2 週において，各世帯は独立にテレビ番組 A をそれぞれ確率 p, q で視聴すると仮定する．また，各世帯は十分に大きな母集団から無作為に抽出されるものとする．

なお，$0 \leq \alpha \leq 1$ を満たす α に対して標準正規分布に従う確率変数 Z の $100(1-\alpha)$ %点 z_α は

$$\Pr(Z \geq z_\alpha) = \alpha$$

で定義され，その具体的な値は次表で与えられる．ここで，$\Pr(Z \geq z_\alpha)$ は Z が z_α 以上になる確率である．

α	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
z_α	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

(1) 900 世帯の視聴データから，第 1 週の世帯視聴率 p の推定値 $\widehat{p} = 0.1$ を得た．このとき，p の 95 %信頼区間を求めよ．

(2) 900 世帯の視聴データから，第 2 週の世帯視聴率 q の推定値 $\widehat{q} = 0.08$ を得た．第 2 週の世帯視聴率は第 1 週より低いと言えるか．有意水準 0.05 で検定せよ．