令和２年度学群編入学試験

理工学群数学類

学 力 検 査
(専門科目)
問 題 冊 子

注意事項

① 問題Ｉ～Ｖの全問題について解答すること。

② 解答用紙に印刷された問題番号を確認し、各問題の解答は指定された解答用紙に記入すること。

③ 解答が書ききれない場合には、「裏へ」と明記して、その解答用紙の裏面に続けて書くこと。

④ 下書き用紙は回収しない。

⑤ 試験時間は 120 分である。

問題 I　4次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A が対角化可能であるかどうかを判定し，その理由を述べよ．

問題 II　V は $\mathbb{R}$ 上の 3 次元ベクトル空間であるとし，V のベクトルの組 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ は V の基底であるとする．線形写像 $f: V \to V$ について

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \\ f(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \\ f(\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1) &= \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

が成り立つとする．以下の問いに答えよ．

(1) 基底 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ に関する f の表現行列を求めよ．

(2) f の像の次元を求めよ．

問題 III　$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < x < \pi \text{ かつ } 0 < y < \pi\right\}$ とする．関数 $f(x, y) = \sin x - \sin y + \sin(x + y)$ の D における極値をすべて求めよ．

問題 IV $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqq x$ かつ $0 \leqq y \leqq x^2\}$ とし, α は $0 < \alpha < 1$ を満たす定数とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 変数変換 $x = s,\ y = s^2 t$ を用いて, 広義積分

$$\iint_D \frac{x^\alpha}{x^4 + y^2}\, dxdy$$

を計算せよ.

(2) 広義積分

$$\iint_D \frac{1}{x^4 + y^2} \log(1 + x^\alpha)\, dxdy$$

が収束することを示せ.

問題 V

(1) 以下の命題を証明せよ.

(a) V, W を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とし, f は V から W への線形写像であるとする. V の有限個の元 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ について, $f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \ldots, f(\mathbf{v}_k)$ が線形独立ならば, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ も線形独立である.

(b) α は 1 より大きい定数とする. このとき, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ は収束する.

(2) 以下の命題に対する反例を与え, それが反例であることを示せ.

(a) $\mathbb{R}$ 上の数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間 U_1, U_2, U_3 が, $U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3 = \{\mathbf{0}\}$ を満たせば, 部分空間の和 $U_1 + U_2 + U_3$ は直和である.

(b) $\mathbb{Z}$ の任意の部分集合 A, B に対して, $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ が成り立つ. ただし, 集合 X に対して, $\mathcal{P}(X)$ は X のべき集合 (X の部分集合全体の集合) を表す.

(c) 写像 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ に対して, 写像 $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ であって合成写像 $g \circ f$ が $\mathbb{Z}$ 上の恒等写像に等しいものが存在すれば, f は全単射である.