令和２年度学群編入学試験

理工学群物理学類

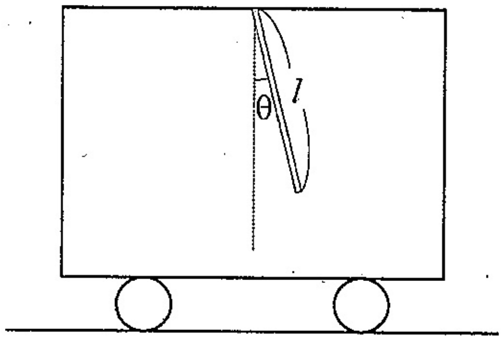
学　力　検　査
（専門科目）
問　題　冊　子

注意事項

① 問題Ⅰ～Ⅲのすべてに解答すること。
② 解答用紙は各問題に対して１枚使用し、それぞれの解答用紙には「問題Ⅰ」のように問題番号を明記すること。
③ 解答が書ききれない場合には、「裏へ」と明記して、その解答用紙の裏面に続けて書くこと。
④ 下書き用紙は採点しない。
⑤ 試験時間は 120 分です。

問題Ⅰ

水平な直線上を一定の速さv_0で右方向に移動している箱の中に，長さ l で質量 m の一様な細い棒が上端を固定されて鉛直につるされている。図のように，時刻 $t=0$ でブレーキをかけて箱が一定の加速度 α で減速を開始したために，棒は振れ始めた。鉛直方向から測った棒の角度をθ，重力加速度の大きさをgとして，以下の問いに答えよ。ただし，空気抵抗などの振子に働く減衰力は考えないものとする。



問１　棒の重心を通り棒に垂直な軸の周りの慣性モーメントI_Gを求めよ。また，棒の端を通り棒に垂直な軸の周りの慣性モーメントが$I=\frac{ml^2}{3}$と与えられることを示せ。

問２　箱が減速しているとき，角度 θ が満たす微分方程式を l,m,α,g のうち必要なものを用いて表せ。

問３　角度 θ が小さく，$\sin\theta\approx\theta$，$\cos\theta\approx 1$と近似できる場合について，この微分方程式を解いて $\theta(t)$ を求め，l,m,α,g のうち必要なものを用いて表せ。

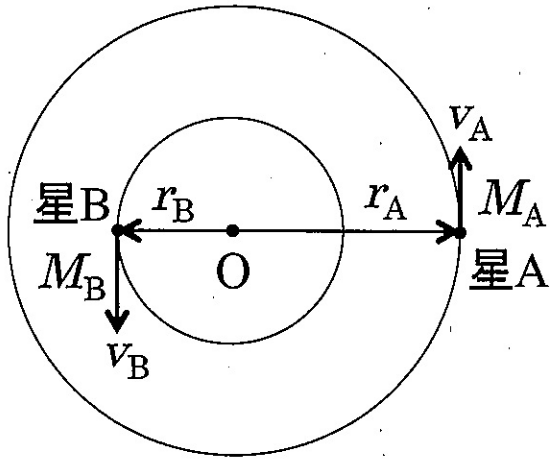
問４　棒の運動状態は，θ と$\dot{\theta}/\omega$ とで表される。直交座標系$(\theta,\dot{\theta}/\omega)$を用いた平面上で，問３の棒の運動状態を表す点の軌跡は原点を通る円となることを示せ。ただし、$\omega=\sqrt{\frac{3g}{2l}}$とする。

問５　この減速によって棒は箱が止まるまでにちょうど n 回振れた。このとき，箱の初速v_0と、箱が減速を開始してから止まるまでに移動した距離 d を求め、l,m,α,g,n のうち必要なものを用いて表せ。

問６　$n=3$ の場合について，箱が減速を開始する前から，停止後しばらくまでの間の $\theta(t)$ の概略を図示し，なぜそのようになるかを簡単に説明せよ。また、$n=3.5$ の場合についても同様に図示し，説明せよ。

問題 II

質量がそれぞれ M_A、M_B（$M_B > M_A$）の星 A、B が、図のように連星系を作り、重心 O から r_A、r_B の距離で、重心の周りを速さ v_A、v_B で円軌道を描いて公転していた。その後、星 B が爆発を起こしてガスの一部を失い、質量が M_B'に減った。ただし、星 B の爆発は瞬時に起こり、ガスは星 B からからみて一様に球対称に放出されたとする。爆発前の公転の運動エネルギーを T、爆発直後の残された 2 個の星の重心系の動く速さを V'、万有引力定数を G として、以下の問いに答えよ。



問 1．T を M_A、v_A、M_B、v_B を使って表せ。

問 2．爆発前の星 A、B にはたらく力を示せ。

問 3．v_A と v_B を T、M_A、M_B を使って表せ。

問 4．V'を、T、M_A、M_B、M_B'を使って表せ。

以下は、爆発直後で、重心 O が静止した系で考えよ。

問 5．星 A、B の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーを示せ。

問 6．星 A、B の運動エネルギーがポテンシャルエネルギーより大きくなる M_B' を M_A と M_B を使って表せ。

問題III

自然界には、正味の磁荷を持った粒子（磁気単極子）は存在せず、『磁場は電荷の運動である電流によって作られる』と考えられている。『荷電粒子の自転によって磁気双極子（磁石）の磁場が生成される』とは、よく言われる例である。

荷電粒子の自転の模型として、一様に帯電した半径 a の円環(円の円周に一定の線密度 ρ で電荷が分布している)が、円環の軸まわりに一定の角速度 ω で回転する系を考える(図1)。円環に沿っての電荷の運動は、大きさ $I = a\omega\rho$ の円電流とみなせる。この電流が作る磁場が、磁気双極子の磁場とどの程度似ているかを考える。図1のように、円環の中心を原点に、軸方向を z 軸とする座標系を用いる。

閉経路を流れる電流 I の作る磁場はビオ・サバールの法則、

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|^3} \tag{1}$$

で与えられる。$\vec{s}$ は経路上の点の位置ベクトル、μ_0 は真空の透磁率である。

問1 円環上の点の位置ベクトルを、x 軸となす角 θ を用いて $\vec{s} = (a\cos\theta, a\sin\theta, 0)$ と表す。円環の線要素 $d\vec{s}$ を、同じ座標で表せ。

問2 z 軸上の点 $\vec{r} = (0, 0, z)$ での磁場を求めよ。

問3 一般の位置 $\vec{r} = (x, y, z)$ に対して、式(1)を解析的に計算するのは困難であるが、充分遠方 $r = |\vec{r}| \gg a = |\vec{s}|$ での磁場は簡単な式で表される。

(a) 式(1)中の因子 $1/|\vec{r} - \vec{s}|^3$ を $\vec{s}/r$ で展開し、a/r の1次までで近似せよ。

(b) (a)の展開を式(1)に代入した式で、(a)の展開の0次の項からくる $\oint d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{s})$ に比例する項 $\vec{B}_0$ を計算せよ。

(c) 同様に、(a)の展開の1次の部分を含む項 $\vec{B}_1$ を計算せよ。(b)の結果の次数と同じ次数まで計算すればよい。

(d)
$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1 = \frac{3\mu_0 I a^2}{4r^5}(p_x, p_y.p_z)$$
と成分表示する。$p_x, p_y.p_z$ を求めよ。

次に、磁気双極子の磁場を考えよう。仮想的な磁荷の磁荷密度 $\rho_m(\vec{s})$ の作る磁場は、クーロンの法則と重ね合わせの原理に従う：

$$\vec{B}_m(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_m} \int d^3\vec{s} \frac{\rho_m(\vec{s})(\vec{r} - \vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|^3} \tag{2}$$

とする。ε_m は、仮想透磁率である。

問4 どんな磁荷密度分布を持ってきても、その分布の作る磁場 $\vec{B}_m$ で、円環を流れる電流の作る磁場 $\vec{B}$ を完全に再現することはできない。理由を簡潔に述べよ。

問 5. 図 2 のように、仮想的な磁荷 $\pm q_m$ ($q_m > 0$) を持つ点状の粒子 2 つが、各々 $(0, 0, \pm d/2)$ ($d > 0$、複号同順) にある。このような磁気双極子の作る磁場 $\vec{B}_m$ の遠方での値を、問 3 の計算と同様に、d/r について 1 次までの近似で求めよ。

問 6. 問 3 と問 5 の結果を比較して、言えることは何か。簡潔に述べよ。

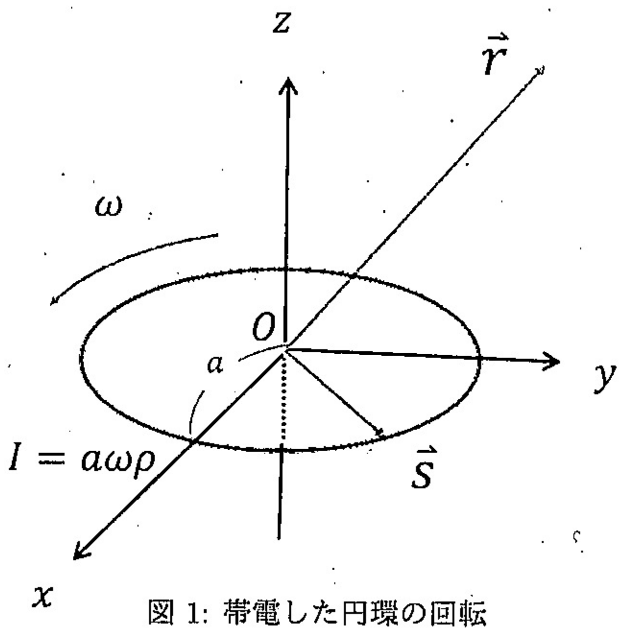


図 1: 帯電した円環の回転

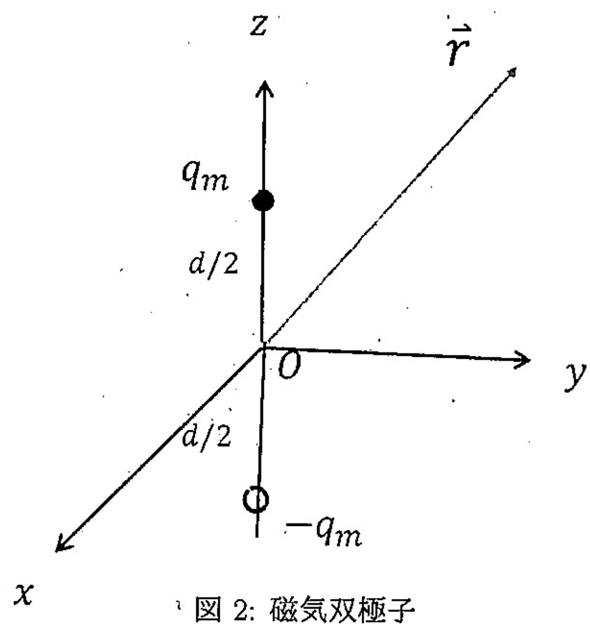


図 2: 磁気双極子