

令和2年度編入学試験

学力検査問題

(150 分)

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子は、この表紙を含めて5ページあり、専門科目(数学、物理学)の各問題がまとめられています。
3. 問題数は、数学が2問、物理学が2問です。
4. 解答用紙と下書き用紙の定められた欄に、「学群・学類」、「氏名」、「受験番号」を記入してください。
5. 解答に際しては、数学、物理学の各問題で、別々の解答用紙を用いて下さい。解答用紙は、裏面を用いても構いません。
6. 解答用紙の上部の 内に、数学問題1、数学問題2、物理学問題1、物理学問題2と記入し、各問題に小問がある場合には、それらの小問の解答を全て要領良く記述して下さい。

数学 1 試験問題

$z = \frac{1}{xy}$, $x > 0$, $y > 0$ を満たす 3 次元空間内の曲面 S について以下の問いに答えよ。

- (1) $(x, y) = (1, 2)$ における曲面 S の接平面の方程式と法線の方程式を求めよ。
- (2) 曲面 S 上で、平面 $x + 3y + 9z + 18 = 0$ との距離が最も近い点の座標を求めよ。
- (3) 6 つの平面 $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$, $z = 2$ で囲まれる立方体を曲面 S で分割して得られる 2 つの領域のうち、原点を含まない方の領域の体積を求めよ。

数学 2 試験問題

行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ について、以下の問いに答えよ。

(1) 行列 A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を求めよ。ただし、 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ とする。

(2) 行列 A の正規化した固有ベクトル u_1, u_2, u_3 を求めよ。ただし、

$$Au_j = \lambda_j u_j \quad (j=1, 2, 3) \text{ とする。}$$

(3) 行列 A を $P^{-1}AP = D$ として、対角成分が $D_{11} \geq D_{22} \geq D_{33}$ となるように

対角化したとき、 P, P^{-1} および D を求めよ。ただし、 P は直交行列、

D は対角行列、 D_{ij} は D の第 i 行 j 列の成分とする。

(4) ベクトル $x(t)$ が、 $\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t)$, $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たすとき、 $x(t)$ を求め

よ。

(5) ベクトル $y(t)$ が、 $\frac{d^2}{dt^2}y(t) = -e^4 y(t)$, $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dot{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たすと

き、 $y(t)$ を求めよ。ただし、 $\dot{y}(t) = \frac{d}{dt}y(t)$ とする。

物理学 1 試験問題

θ を媒介変数として,

$$x = 2\theta + \sin 2\theta$$

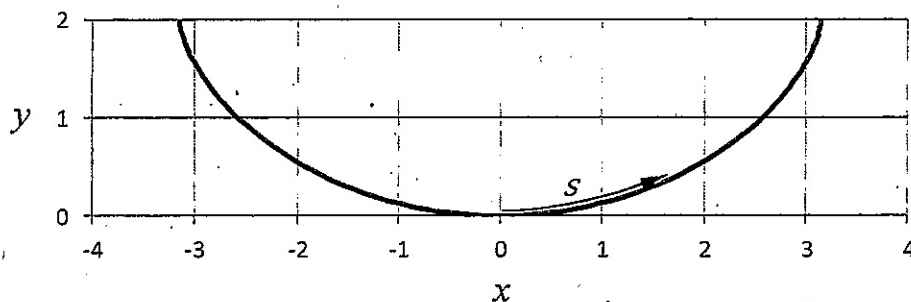
$$y = 1 - \cos 2\theta$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

で表される上に凹の曲線がある (図参照)。ここで, x 軸は水平方向, y 軸は鉛直方向の座標であり, 重力加速度 g は y 軸の負の向きに作用するとする。

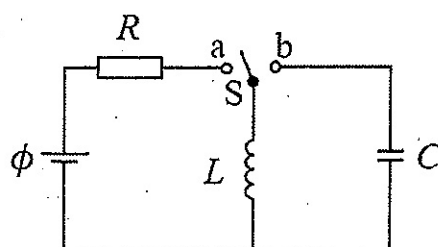
この曲線上のある位置に大きさを無視できる質量 m の質点を置き静かに手を離したところ, 質点は曲線に沿って運動を始めた。時間を t として, 以下の問いに答えよ。なお, 質点と曲線間の摩擦抵抗, その他の抵抗は考えない。

- (1) この曲線の局所勾配が $\tan \theta$ となることを示せ。
- (2) この曲線に沿った長さを表す座標 s を考える (図参照)。原点 $(x, y) = (0, 0)$ において $s = 0$ とするとき, s と θ の関係を示せ。
- (3) s を用い, 質点の運動方程式とその解を示せ。
- (4) (3) で求めた運動方程式を用いて, この運動においてエネルギー保存則が満たされていることを示せ。



物理学2 試験問題

図のように、抵抗値 R の抵抗，インダクタンス L のコイル，電気容量 C のコンデンサー，起電力 ϕ の電池，スイッチ S によって構成される回路がある。コンデンサーの極板の面積を A とし，極板間の誘電率を ϵ とする。コンデンサーの極板は十分に広く，極板間の電場は一様と見なしてよいものとする。また，最初コンデンサーには電荷は蓄えられていないものとする。以下の問いに答えよ。



- (1) 時刻 $t = 0$ において S を a 側に接続すると，電流 $I_1(t)$ が流れ始めた。
 - (a) $I_1(t)$ を求めよ。また $I_1(t)$ のグラフを描け。
 - (b) 時刻 $t = 0$ から t_1 までの間に電池のする仕事 W と抵抗に発生するジュール熱 J をそれぞれ求めよ。
 - (c) 時刻 t_1 においてコイルに蓄えられているエネルギー U を求めよ。
 - (d) W, J, U の間の関係を示し，その意味を説明せよ。
- (2) (1)の状態ですべての時間が経って電流の大きさが一定の値 I_0 となった後， S をすばやく b 側へ切り替えるとコイルとコンデンサーの間に電流が流れ始めた。このとき流れる電流を $I_2(t)$ ，コンデンサーに蓄えられる電荷を $Q(t)$ とする。ただし，スイッチを切り替えた時刻を改めて $t = 0$ とし， $I_2(0) = I_0$ とする。
 - (a) $I_2(t)$ を L, C, I_0, t を用いて示せ。また $I_2(t)$ のグラフを描け。
 - (b) 時刻 t においてコイルに蓄えられているエネルギー $U_L(t)$ とコンデンサーに蓄えられているエネルギー $U_C(t)$ をそれぞれ求めよ。また， $U_L(t)$ と $U_C(t)$ のそれぞれのグラフを描け。
 - (c) コンデンサーの極板間の電場 $E(t)$ を $Q(t)$ を用いて示せ。また， $t = 0$ の直後に電荷が蓄えられ始めたときの電場の向きを答えよ。
 - (d) コンデンサーの極板間の変位電流密度 $i_d(t)$ を A, L, C, I_0, t を用いて示せ。