筑波大学理工学群社会工学類

令和２年度

編入学試験

学力検査問題

（数学）

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで，この問題の中身を見てはいけません．

2. すべての解答用紙（罫紙）と下書き用紙の定められた欄に，志望する「学群・学類」，「氏名」,「受験番号」をすべて記入すること．

3. 問題は5問あります．問題1は(1)から(3)まで, (4)から(6)までをそれぞれ1枚の解答用紙を使用し, 問題2から5までは問題ごとにそれぞれ別の解答用紙を使用すること．

4. 解答用紙の裏面を使用しても構いません．

5. 解答用紙上部の細長い四角の枠内に問題番号を記入すること．なお, 問題1の場合はそれぞれの解答用紙に「問題1 (1)〜(3)」，「問題1 (4)〜(6)」と記入すること．

6. 試験終了後，解答用紙と下書き用紙を別々に集めます．問題冊子は持ち帰ってください．

問題１ 次の説明を読んで, 各設問に答えよ.

ある企業で従業員の喫煙状況を調査したところ, 毎年, 非喫煙者 (喫煙経験がない者) の $\dfrac{1}{9}$ が喫煙を始め, 喫煙者のうち $\dfrac{1}{3}$ が禁煙する. また, 禁煙者 (かつて喫煙していて, かつ喫煙を止めた者) のうち $\dfrac{1}{6}$ は, 再び喫煙を始めることが分かった. ただし, ある年の非喫煙者, 喫煙者, 禁煙者の人数をそれぞれ x_0, y_0, z_0, その n 年後の非喫煙者, 喫煙者, 禁煙者の人数をそれぞれ x_n, y_n, z_n とし, 対象期間中に従業員は変わらないものとする.

(1) 1 年後の非喫煙者, 喫煙者, 禁煙者の人数 x_1, y_1, z_1 を, x_0, y_0, z_0 で表せ.

(2) ある年の非喫煙者, 喫煙者, 禁煙者の人数とその n 年後の非喫煙者, 喫煙者, 禁煙者の人数をそれぞれ

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$$

と書く. 1 年後の非喫煙者, 喫煙者, 禁煙者の人数を表す式を

$$\boldsymbol{x}_1 = A\boldsymbol{x}_0$$

としたとき, 行列 A を求めよ.

(3) 行列 A の固有値と対応する固有ベクトルを全て求めよ.

(4) $\boldsymbol{x}_n$ を A と $\boldsymbol{x}_{n-1}$ で表せ.

(5) n 年後の非喫煙者, 喫煙者, 禁煙者の人数を表す式を

$$\boldsymbol{x}_n = B\boldsymbol{x}_0$$

とする. このとき, 行列 B を A を用いて表せ. さらに, 行列 B を求めよ.

(6) ある年の非喫煙者, 喫煙者, 禁煙者の人数はそれぞれ 1458 人, 456 人, 408 人だった. その 3 年後の禁煙者の人数を求めよ.

問題 2 次の説明を読んで, 各設問に答えよ.

(1) 関数 $f(x, y)$ を次のように定義する.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

この関数 $f(x,y)$ について, 以下の問に答えよ.

① $(x,y)=(0,0)$ での x についての偏微係数 $f_x(0,0)$ を求めよ.

② $k\neq 0$ に対して $(x,y)=(0,k)$ での x についての偏微係数 $f_x(0,k)$ を求めよ.

③ 偏導関数 $f_x(x,y)$ の $(x,y)=(0,0)$ での y に関する偏微係数 $f_{xy}(0,0)$ の定義を f_x を用いて書け.

④ $f_{xy}(0,0)$ を求めよ.

(2) 関数 $g(x,y)$ を次のように定義する.

$$g(x,y)=\frac{\log(1+x)}{1+y}.$$

この関数 $g(x,y)$ について, 以下の問に答えよ.

① 導関数 $g_x(x,y)$, $g_y(x,y)$, $g_{xx}(x,y)$, $g_{xy}(x,y)$, $g_{yy}(x,y)$ と $(x,y)=(0,0)$ におけるそれぞれの値を求めよ.

② $(x,y)=(0,0)$ 周りのテイラー展開を 2 次の項まで計算せよ. なお, 3 次以降は剰余項 R_3 と表記すれば良い.

問題 3 次の説明を読んで, 各設問に答えよ.

(1) 次の各問いに答えよ.

$y=\tan x$ の逆関数を $y=\arctan x$ と書く. ある y の値に対して $y=\tan x$ を満たす x は多数存在するが, 定義域を $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ に限る場合, $y=\tan x$ は単射となり一意に逆関数を定義することができる. この定義域における $y=\tan x$ の逆関数を $y=\mathrm{Arctan}\,x$ と書くこととする.

上記の定義域において, 次の問に答えよ.

① $y=\mathrm{Arctan}\,x$ について, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{1+x^2}$ を証明せよ.

② 次の無限級数 S の値を求めよ. ただし, その導出過程を示すこと.

$$S=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\frac{n}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right).$$

(2) 次の 2 重積分を計算せよ.

$$I=\int\int_D xe^{y^2}dxdy,\quad D=\{(x,y)\,|\,0\leq x\leq 1, x^2\leq y\leq 1\}.$$

問題 4 次の説明を読んで, 各設問に答えよ.

当たりが2本, 外れが2本からなるくじがあり, A, Bの2人が非復元抽出で1本ずつくじを引く. Aの引いたくじが当たりのときを $X=1$, 外れのときを $X=0$ とし, Bが引いたくじが当たりのときを $Y=1$, 外れのときを $Y=0$ とするとき, 次の問に答えよ.

(1) 次の同時確率分布表の (ア)〜(ク) に入る適当な値を答えよ.

X \ Y	1	0	合計
1	(ア)	(イ)	(ウ)
0	(エ)	(オ)	(カ)
合計	(キ)	(ク)	1

(2) 期待値 $E[X]$, $E[Y]$, 分散 $V[X]$, $V[Y]$, 共分散 $Cov[X,Y]$ を求めよ.

(3) 相関係数 $\rho(X,Y)$ を求めよ.

問題 5 次の説明を読んで, 各設問に答えよ. ただし, 計算や解答の際には, 小数第4位を四捨五入した値を用いよ.

ある地方自治体の首長選挙では, 現職と新人1人の2人だけが立候補した. 地元報道機関が出口調査 (投票を済ませた人に直接投票先をたずねる調査) を行ったところ, 以下の結果を得た. なお, 各標本は無作為に抽出され, 全てが有効投票であり, 出口調査の無回答者もいなかったものとする.

投票先	現職	新人
人数	441	400

また, $0 \leq \alpha \leq 1$ を満たす α に対して標準正規分布に従う確率変数 Z の $100(1-\alpha)$ %点 z_α は

$$\Pr(Z \geq z_\alpha) = \alpha$$

で定義され, その具体的な値は次表で与えられる. ここで, $\Pr(Z \geq z_\alpha)$ は Z が z_α 以上になる確率である.

α	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
z_α	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

(1) 現職の得票率 p の 95 %信頼区間を求めよ. 得票率とは, 有効投票数に占めるその候補者が獲得した票数の割合である.

(2) 現職は当選するといえるか, 適当な帰無仮説と対立仮説を立て, 有意水準 0.05 で検定せよ.