

令和2年度

理工学群数学類  
私費外国人留学生入試

小論文  
試験問題

注意事項

- ① 問題Ⅰ～問題Ⅲを別々の解答用紙に日本語で解答してください。
- ② 試験時間は90分です。

問題Ⅰ  $x, y$  は正の整数とする. 以下の問いに答えよ.

- (1)  $x^2 + 4xy - 5y^2$  が 3 の倍数のとき,  $x - y$  も 3 の倍数であることを示せ.
- (2)  $x^2 + 4xy - 5y^2 = 4500$  を満たす正の整数の組  $(x, y)$  をすべて求めよ.

問題Ⅱ 正の実数  $a$  に対して, 曲線  $C: y = \log x$  ( $x > 0$ ) 上の点  $(a, \log a)$  を  $Q_a$  とし,  $Q_a$  における  $C$  の法線を  $\ell_a$  とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 相異なる正の実数  $a, b$  に対して,  $\ell_a$  と  $\ell_b$  の交点  $P_{a,b}$  を求めよ.
- (2) 正の実数  $a$  を固定し,  $b$  を  $a$  とは異なる正の実数とする.  $b$  を  $a$  に近づけると, (1) で求めた点  $P_{a,b}$  はある点  $P_a$  に近づく.  $P_a$  の座標を求めよ.
- (3) 点  $Q_a$  と点  $P_a$  の距離  $R(a)$  を  $a$  で表せ. また,  $a$  が正の実数全体を動くとき,  $R(a)$  の最小値を求めよ.

問題 III 関数  $y = f(x)$  は区間  $0 \leq x \leq \pi$  で連続な減少関数であり,  
 $f(x) \geq 0$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) を満たす. 正の整数  $n$  に対して

$$I_n = \int_0^\pi f(x) |\sin nx| dx$$

とおく. 以下の問いに答えよ.

(1) 不等式

$$\frac{2}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{(k-1)\pi}{n}\right) \geq I_n \geq \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

を示せ.

(2)  $f(x) = \frac{1}{\pi^2 + x^2}$  の場合に  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$  を求めよ.